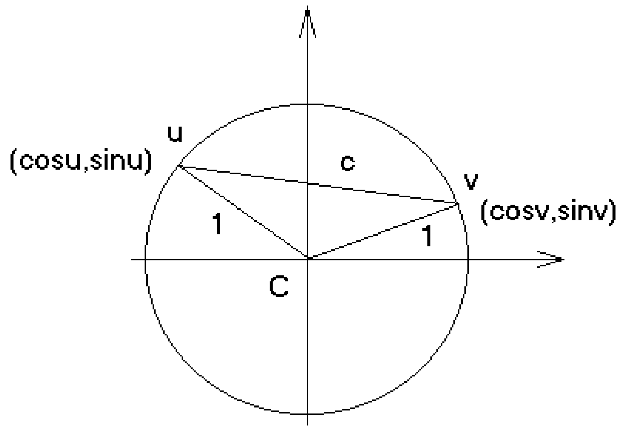
Additionsformler og logaritmiske formler samt deres anvendelse i Musik-Fysik



Cosinusrelationerne anvendt på trekanten giver $c^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(u-v) = 2 - 2\cos(u-v)$

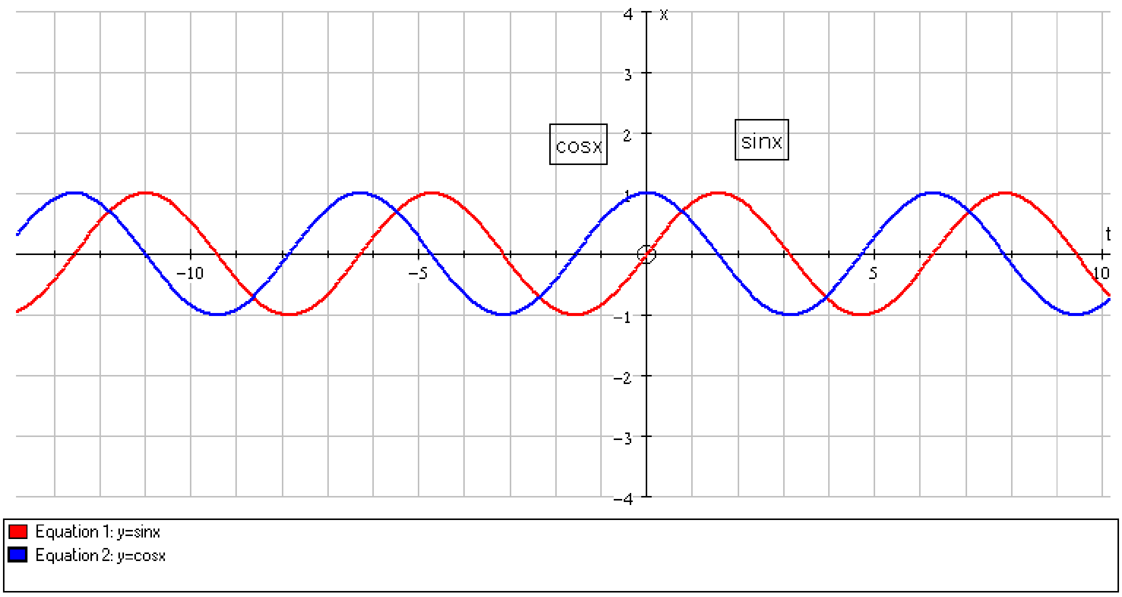
Afstandsformlen anvendt på de to punkter på cirklen giver:

$c^2 = (\cos u - \cos v)^2 + (\sin u - \sin v)^2 = \cos^2 u + \cos^2 v - 2\cos u \cos v + \sin^2 u + \sin^2 v - 2\sin u \sin v$

$$= 1 + 1 - 2\cos u \cos v - 2\sin u \sin v$$

Hvis man sammensætter disse to udtryk får man: $2 - 2\cos(u-v) = 2 - 2\cos u \cos v - 2\sin u \sin v$
hvilket giver: $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Hvis vi erstatter v med -v får vi : $\cos(u+v) = \cos u \cos(-v) + \sin u \sin(-v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$



Vi ved at $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ eller $\sin x = \cos(x - \pi/2)$

$\sin(u - v) = \cos(u - v - \pi/2) = \cos(u - (v + \pi/2)) = \cos u\cos(v + \pi/2) + \sin u\sin(v + \pi/2) =$

$= \cos u\cos(v - \pi/2 + \pi) + \sin u\cos v = \cos u(-\cos(v - \pi/2) + \sin u\cos v$

$= -\cos u\cos(v - \pi/2) + \sin u\cos v$

$= -\cos u\sin v + \sin u\cos v$

$= \sin u\cos v - \cos u\sin v$

Hvis vi erstatter v med -v får vi:

$\sin(u + v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$

Vi kan samle disse fire formler (Additionsformlerne):

1) $\cos(u - v) = \cos u\cos v + \sin u\sin v$

2) $\cos(u + v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v$

3) $\sin(u - v) = \sin u\cos v - \cos u\sin v$

4) $\sin(u + v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v$

Hvis vi lægger 1) og 2) sammen får vi: $\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2\cos u\cos v$

Hvis vi trækker 1) fra 2) får vi : $\cos(u + v) - \cos(u - v) = -2\sin u\sin v$

Vi sætter $u + v = x$ og $u - v = y$.

Hvis vi lægger sammen får vi: $2u = x + y$ altså $u = (x + y)/2$

Hvis vi trækker y fra x får vi: $2v = x - y$ altså $v = (x - y)/2$

Hvis vi indsætter dette i de to foregående udtryk får vi:

$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos((x + y)/2)\cos((x - y)/2)$

$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin((x + y)/2)\sin((x - y)/2)$

Hvis vi gør det tilsvarende med formel 3) og 4) får vi:

$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin((x + y)/2)\cos((x - y)/2)$

$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos((x + y)/2)\sin((x - y)/2)$

Vi kan samle disse fire formler sammen (logaritmiske formler):

5) $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos((x + y)/2)\cos((x - y)/2)$

6) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin((x + y)/2)\sin((x - y)/2)$

7) $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin((x + y)/2)\cos((x - y)/2)$

8) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos((x + y)/2)\sin((x - y)/2)$

Vi skal specielt bruge formel 7):

En tone med frekvensen 11 Hz er beskrevet ved $f(t) = A\sin(11\cdot 2\pi t) = A\sin(22\pi t)$

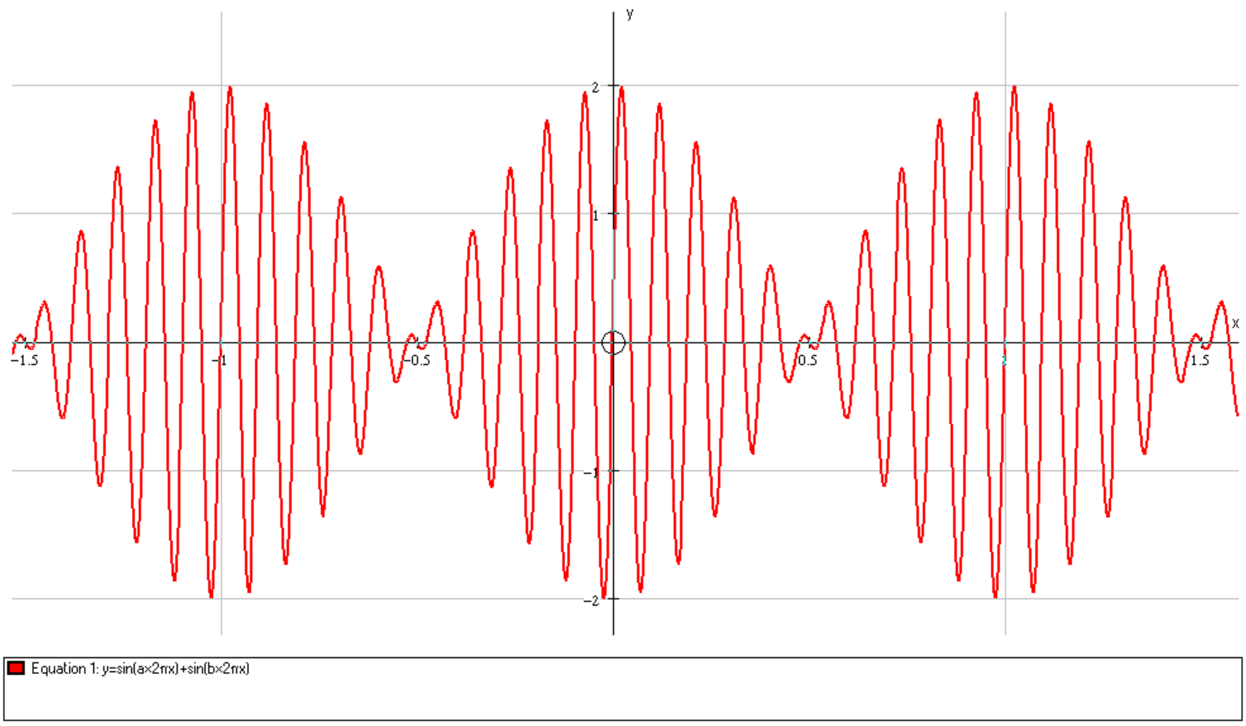
En anden tone med frekvensen 10 Hz er beskrevet ved $g(t) = A\sin(10\cdot 2\pi t) = A\sin(20\pi t)$

Bemærk at de to toner svinger i takt og at de er lige stærke.
Hvis vi lægger disse to toner sammen får vi : $A\sin(22\pi t) + A\sin(20\pi t)$
som v.h.a. 7) kan omskrives til:
$2A\sin((22 + 20)/2\pi t)\cos((22 - 20)/2\pi t) = 2A\cos(\pi t)\sin(21\pi t)$.

Man hører altså en tone med frekvensen 10.5 Hz givet ved $\sin(21\pi t)$ men med en variabel amplitude givet ved $A(t) = 2A\cos(\pi t)$.

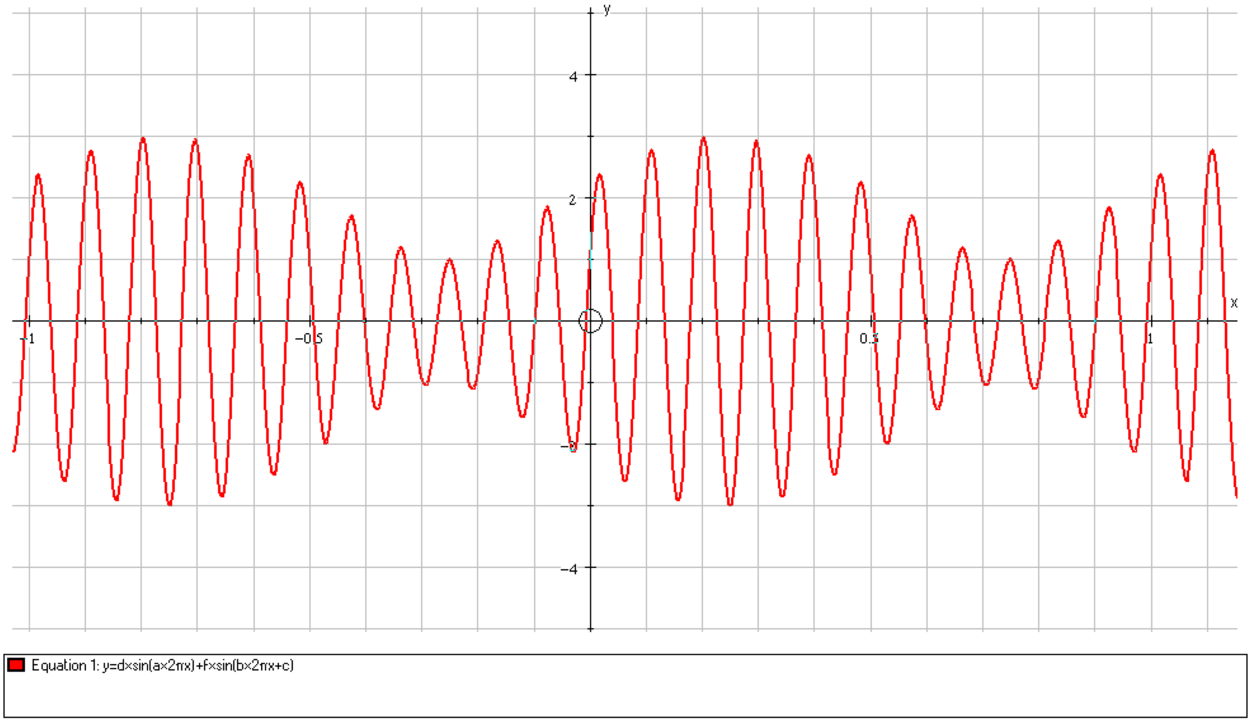
Amplituden svinger altså med 1 Hz, idet hver halve svingning af $\cos(\pi t)$ giver anledning til at amplituden numerisk vokser og aftager.
Nedenfor ses denne graf.

Hvis vi ser på et lidt mere generelt tilfælde kunne man tænke sig at de to toner igen har frekvenserne 11 Hz og 10 Hz men tonen med 11 Hz har en amplitude på 2 mens den anden



har en amplitude på 1 og samtidig har den ene en faseforskydning i forhold til den anden på 1.5 radianer: $f(t) = 2\sin(11\cdot 2\pi t) + \sin(10\cdot 2\pi t + 1.5)$
Leddet $\sin(10\cdot 2\pi t + 1.5)$ kan skrives $\sin(10\cdot 2\pi(t + 1.5/(20\pi)) = \sin(10\cdot 2\pi(t + 0.02387))$

Nedenfor ses graferne for $2\sin(22\pi t)$ og $\sin(20\pi t + 1.5)$ samt deres sum (der er lagt 4 hhv. -



5 til de to funktioner så de ikke ligger oven i hinanden)