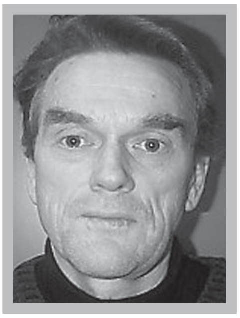
Om matematikk og musikk

Estetiske fag og matematikk
1. del

Af: Eystein Raude
Høgskolen i Vestfold, afd. RI/LU
email: era@hive.no



Artiklen er delt op i flere dele. Anden del bringes i næste nummer af Matilde, som vil have Matematik og musik som tema

Innledning.

Musikken tilhører de skjønne kunster. Den fløytespillende Euterpe var en av de ni musene, søstergudene, i følge gresk - romersk mytologi. Musikken inntar en spesiell plass blant kunstartene fordi den taler så direkte til "hjertene". Musikken beskriver intet (Wittgenstein, 1997.), den er bare musikk, og dens språk er universelt. Den kan sette følelser av ulik slag i sving og den kan, som vi kjenner det fra historien om kong David, berolige et plaget sinn. Musikken betyr også mye for mange av elevene. Ikke bare som "forbrukere", men som utøvere.

Selv om musikken er den mest abstrakte av alle menneskelige ytringer, lar den seg beskrive, ikke bare i ord, men også med matematiske begreper.

Matematikken er vitenskapenes dronning som næres av de andre vitenskaper og gir liv til disse. Matematikken er både en edel kunstart og et effektivt verktøy med hvilket man kan beskrive "verden" og foreta beregninger av både enkle og intrikate forhold.

Fellesrådet for kunstfagene i skolen, FKS, har sammen med Landslaget for matematikk i skolen, LAMIS, ønsket å rette oppmerksomheten mot

- "hvordan praktiske og estetiske fag sammen med matematikk gjensidig kan påvirke hverandre i tverrfaglige undervisningsopplegg" og
- "å utvikle og utprøve nye undervisningsformer med aktiviteter som fremkaller undring, refleksjon og skaperglede"

For både musikk og matematikk gjelder kravet om kunnskaper og ferdigheter dersom resultatet av et tverrfaglige arbeid skal bli noe mer enn bare en "happening". Denne artikkelen ønsker å se noen sider av musikken i lys av matematikken.

Musikk er opptatt av å kombinere vokale og/eller instrumentale lyder for formens skjønnhet eller følelsesmessige uttrykk (som bare er komponistens; forfatterens anmerkning), vanligvis i følge kulturelle standarder for **rytme** og **melodi**, og i vestlig musikk også **harmoni**. Andre viktige komponenter i musikalsk lyd er **tone**, **tonefarge** og instrumentasjon (Encyclopedia Britannica, 1994 - 1999).

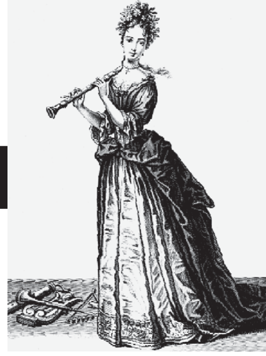
1. Toner. Intervaller. Stemminger.

Toner kan elevene lage ved enten å synge, blåse i en blokkfløyte, slå på en xylofon eller klimpre på en gitar. Tonehøyden er avhengig av antall svingninger per sekund eller frekvensen til det som svinger, enten det er stemmebåndene eller strengen. Ved f.eks. å presse ned en gitarstreng på ulike steder og deretter anslå den, vil en oppleve den direkte sammenhengen mellom strengenes lengde og tonehøyden.

1.1. Pytagoreerne

oppdaget empirisk at de grunnleggende **intervallene** (toneavstandene) i musikken passet til elementene i *tetrakys* eller "fireheten" (1 + 2 + 3 + 4 = 10), fordi de hadde **forholdene** 2 : 1 (oktaven), 3 : 2 (kvinten) og 4 : 3 (kvarten). Disse intervallene ble karakterisert som **rene**. Dersom lengden av en fastspent streng er L , vil **grunntonen** tilsvare $2L$, fordi strengens lengde er halve bølgelengden. (Bølgelengden er altså $2L$.) Tonens frekvensen kan da skrives som lydfarten dividert på bølgelengden,λ. Ved å presse strengen ned på midten vil den framkalte frekvens bli dobbelt så stor, den såkalte oktaven. Grekerne oppdaget at ved å presse ned strengen hhv. ved $\frac{2}{3}$ og $\frac{3}{4}$ av dens lengde fikk man intervallene kalt kvint og kvart. Frekvensene i forhold til grunntonen er derfor hhv $\frac{3}{2}$ og $\frac{4}{3}$.

Den vanligste **skala** i vestens musikk er den **diatoniske** (en veksling mellom hele og halve trinn). Samtlige **pytagoreiske intervaller** ble utledet som et antall **rene kvinter** (3 hele og et halv trinn) minus et



nødvendig antall oktaver for å komme tilbake til den aktuelle oktaven ved hjelp av formelen $\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m$.

Man hadde oppdaget at intervaller oppover kunne "adderes" ved å multiplisere de tilsvarende frekvensforhold med hverandre og intervaller nedover kunne "subtraheres" ved å dividere frekvensforholdene med hverandre (å dividere med en brøk er som kjent ekvivalent med å multiplisere med den omvendte brøken). Frekvensforholdet i heltonetrinnet $c^1 - d^1$ (**stor sekund**) blir derfor $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$, fordi vi må tenke slik: $c^1 - g^1 - d^2 - d^1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$. På tilsvarende måte blir forholdet for intervallet $c - e$ (**stor ters**) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{64}$. Vi kjenner nå frekvensforholdene til intervallene oktav, stor sekund, stor ters, ren kvart og ren kvint. I den diatoniske skala gjenstår derfor **stor sekst** ($c - a$) og **stor septim** ($c - h$). Gjør utregningene selv, og du vil komme til hhv. $\frac{27}{16}$ og $\frac{243}{128}$.

Hva så med halve tonetrinn? Intervallene er av grunnleggende betydning i musikken, både de melodiske, eller de som framkommer ved å springe fra en tone til den neste, og de harmoniske, dvs. de som framkommer når man slår an to toner samtidig. Spranget $e - f$ tilsvarer et halvt tonetrinn, og det skulle da få frekvensforholdet $\frac{4}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{243}$. Det samme vil gjelde for spranget $h - c$.

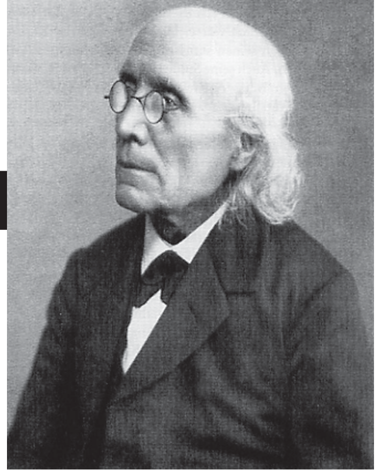
Ved siden av de rene og store intervaller finnes det forstørrede, små og forminskede intervaller. Disse framkommer ved å heve eller senke toner med halve trinn. Et intervall av den største betydning innenfor tradisjonell vestlig musikk er tersen, fordi den bestemmer dur - moll - tonaliteten. Den lille tersen, også kalt molltersen, består av 1 helt og et halvt trinn: $\frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243} = \frac{32}{27}$. Videre avledninger gir stadig mer kompliserte brøker.

Et interessant forhold er følgende: 12 rene kvinter tilsvarer syv oktaver, det vil si at de er enharmoniske, eller at de tilsvarende toneartene er de samme. (Man ender på tonen *hiss* dersom man tar utgangspunkt i *c*, og *hiss* og *c* er samme tone i skalaen.) Ikke desto mindre er forholdet mellom disse brøkene forskjellig fra 1, og denne forskjellen som kalles en kommadifferanse, nærmere bestemt det **pytagoreiske komma**, er $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{531441}{524288}$, som tilsvarer omtrent en feil på1.4%! Dette medfører at harmoniene ikke er helt ens, noe som har betydning når en skal spille på instrumenter der en kan veksle mellom toneartene, f.eks. et klaver eller en gitar.

1.2. Renstemming

kalles den stemmingen hvor samtlige intervaller avledes av et visst antall rene kvinter og store terser, her $\frac{5}{4}$. Det medfører at intervallene i den diatoniske skala på tilsvarende måte som for de pytagoreiske intervaller blir $\frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}$. Disse (tilsiktede) enkle forholdene stammer fra renessansens "scenario", tallforholdene 1:2:3:4:5:6, som faller sammen med de første seks deltonene i **naturtonerekka**. De første intervallene i denne rekka er oktav, ren kvint, ren kvart, stor ters og liten ters. Den store tersen har forholdstallet $\frac{5}{4}$, men den lille tersen $\frac{6}{5}$. Avstanden mellom den rene kvarten og den store tersen blir $\frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$. Dette er et halvt tonetrinn. Den lille tersen blir derfor $\frac{9}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{6}{5}$. Den store seksten blir $\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{3}$, noe som skyldes at man i den renstemte diatoniske skalaen hadde to

Gustav Theodor Fechner (1801-87)



heltonetrinn, et stort og et lite, hhv. $\frac{9}{8}$ og $\frac{10}{9}$. Forskjellen mellom dem er lik forskjellen mellom tersene i den pytagoreiske og den renstemte skala: $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$ som kalles det **syntoniske** komma, som utgjør en feil på 1.3%!

Vi har sett at man opererer med ulike hel- og halvtonetrinn i den pytagoreiske og den rene stemming, noe som fører til problemer bl.a. med samklang. Det er ønskelig å bruke toneartsutsving ("å gå over til andre tonearter") og tonearter med faste fortegn. Derfor er det nødvendig med en utjevning, en **likesvevende temperering**.

1.3. Likesvevende temperering.

Anta at vi skal spille en G-dur skala på et piano med pytagoreisk stemming. Vi må da bestemme frekvensforholdet for tonen *fiss* som ikke fins i C-dur skalaen. For å finne tonen *fiss* må vi gå seks rene kvinter opp og 3 oktaver ned, noe som gir $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{729}{512}$. Frekvensforholdet mellom *fiss* og *g,* den syvende og åttende tonen i en G-dur skala, skulle egentlig være lik frekvensforholdet for en pytagoreisk halvtone, $\frac{256}{243}$, men det er faktisk litt lavere, fordi vi må ta forholdet mellom svingetallene for *fiss* og *g* (3/2). Forholdet blir 0.94922.

Middelverdien for de ulike heltonetrinn blir $\frac{\frac{9}{8}+\frac{10}{9}}{2} = \frac{161}{144} \approx 1.11806$. Med likedeling skulle heltonetrinnet bli omtrent 1.11803. (Kaller vi **primens** svingetall for 1 og heltonetrinnet *x*, får skalaens tredje tone svingetallet x^2. Dette gir likningen $x^2 = \frac{5}{4}$.) Ved temperert avstemming blir de fem heltonetrinnene delt inn i halvtonetrinn og alle halvtonetrinnene gjort like store. På den måten finner vi halvtonetrinnet *x* til å bli $x = \sqrt[12]{2} \approx 1.05946$.

I praksis trekker en fra eller legger til passende brøkdeler av det pytagoreiske og syntoniske komma, i første rekke fra kvinter. Det blir da ofte for små kvinter og for store terser. Pianostemmeren stemmer først etter intervallene oktav, kvint og kvart, og så justerer han/hun halvtonetrinnene opp eller ned så intervallene høres like. Det siste avgjøres etter hans/hennes gehør. (Bjørklund, 1966.)

1.4. Centen og den fechnerske lov.

I 1864 introduserte engelskmannen *A.J.Ellis* enheten **cent**, *C*, for intervallberegninger. Til grunn for innføringen av den nye beregningsmåten for intervaller ligger en oppdagelse den tyske fysiker og filosof *Gustav Theodor Fechner* (1801 - 1887), http://www.stern.nyu.edu/~wstarbuc/Janusweb/sld004.htm, gjorde innenfor området psykofysikk, nemlig en lov for fysiologiske sansefornemmelser (Rignes,1978). Den sier at økningen i sansefornemmelsen er proporsjonal med økningen i sansepåvirkningen og omvendt proporsjonal med sansepåvirkningen. Dersom vi bruker denne loven på lydfornemmelser, setter vi for sansepåvirkningen frekvensen *f* og sansefornemmelsen lydstyrken *L*. Dette gir den matematiske sammenhengen $dL = k \cdot \frac{df}{f}$. *k* er en konstant som bestemmes ut fra gitte betingelser. Integralregning gir $\ln\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{k}(L_2 - L_1)$. Overgang til logaritmer med grunntallet 10 gir $\lg\frac{f_2}{f_1} = \frac{0.4343}{k}(L_2 - L_1)$.

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791)

Enheten *cent* er $\frac{1}{1200}$ av en oktav. Dette gir oss verdien på *k*: $\lg 2 = \frac{0.4343}{k} \cdot 1200$ eller $k = 1731.256046$. Antall *cents* for et aktuelt intervall kan derfor beregnes som $L_2 - L_1 = C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{f_2}{f_1}$.

Alle de 12 like store halvtonetrinnene i den likesvevende temperering blir delt inn i like store deler (100 C = 1 temperert halvtone). Like store vil si konstant frekvensforhold. Den rene kvinten får derfor verdien 700 C i forhold til tolvtonesystemet, 702 C i forhold til de pytagoreiske og rene stemminger. ($C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{3}{2} = 701.96$.) Verdien 150 C viser direkte at intervallet ligger midt mellom et hel- og et halvtonetrinn. I det pytagoreiske system beregner vi intervallet ren kvint + heltone ved $\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16}$, dvs. ved multiplikasjon. I det nye systemet **adderer** vi enhetene 702 C + 204 C = 906 C. ($C = 3986.313715 \cdot \lg \frac{27}{16} = 906.$)

Det er interessant å se at grekerne hadde empirisk oppdaget den *fechnerske lov*! Sammenhengen mellom multiplikasjon og addisjon går kanskje tydeligere fram dersom vi skriver $C_{kv\,\mathrm{int}} + C_{heltone} = k \cdot \left(\lg \frac{3}{2} + \lg \frac{9}{8} \right) = k \cdot \lg \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8}$.

Det er ellers verdt å legge merke til at det pytagoreiske komma er omtrent 24 cents, dvs. en åttedels tone. (Det fortelles at lille Wolfgang Amadeus (Mozart) en gang for sin pappa påpekte at fiolinen hans var uren, og at det dreide seg om en kvart halvtone. For kammertonens vedkommende skulle det dreie seg om en “urenhet” på omtrent 6 Hz!) Alt etter hvor elevene befinner seg i skoleverket går det an å utforske de forholdene vi her har betraktet. Et eksempel kunne være å bruke flasker av ulik høyde og med varierende vannmengde til å lage den diatoniske skala og spille enkle melodier; både pytagoreiske og renstemte melodier, og sammenlikne disse med de melodiene en får ved å spille på et temperert klaver. I området ca. 50 - 500 Hz er den minste hørbare frekvensforandring 1 - 2 Hz ved lydtrykknivået 40 dB. (Bjørklund.) (En må bare huske på at grunntonens bølgelengde beregnes ut fra det fysiske forhold at avstanden mellom vannflaten og flaskeåpningen utgjør er firedel av bølgelengden.)

Overgangen fra pytagoreisk stemming til lik temperering tok århundrer og er en parallell til forholdet mellom matematikk og musikk. På pytagoreernes tid var musikk en matematisk disiplin som omhandlet tallforhold, brøker og proporsjoner. Musikk som en del av matematikken holdt seg helt opp til renessansen. Likestemming, eller avviket fra den pytagoreiske, ble ikke virkelig populær før rundt 1630, da Fader Mersenne formulerte uvurderlige regler for stemming ved hjelp av “svevinger”, og som brukes den dag i dag. (Garland og Kahn, 1995.) Tabellen nedenfor viser en sammenlikning mellom pytagoreisk, ren og temperert stemming.

Pytagoreisk stemming	Ren stemming	Liketemperert stemming	Frekvenser i en C-dur skala med kammertone 440 Hz
f (primens frekvens)	*f*	*f*	≈262 Hz
9/8 *f*	9/8 *f*	$2^{\frac{1}{6}} \approx 1.122 f$	≈294 Hz
81/64 *f*	5/4 *f*	$2^{\frac{1}{3}} \approx 1.260 f$	≈330 Hz
4/3 *f*	4/3 *f*	$2^{\frac{5}{12}} \approx 1.335 f$	≈349 HZ
3/2 *f*	3/2 *f*	$2^{\frac{7}{12}} \approx 1.498 f$	≈392 Hz
27/16 *f*	5/3 *f*	$2^{\frac{3}{4}} \approx 1.682 f$	=440 Hz
243/128 *f*	15/8 *f*	$2^{\frac{11}{12}} \approx 1.888 f$	≈494 Hz
2 *f*	2 *f*	2 *f*	≈523 Hz

**Musikartiklen fortsættes i Matilde 27,
hvor vi også hører om Arnold Schönberg**

Arnold Schönberg

Dodekafoniens eller 12-tonemusikkens skaber

Det var Arnold Schönbergs analytiske sans, der i 1922 førte til løsning af det musikalske formproblem indenfor totalitetens rammer. Når det blev ham, der kom til at tilføre den total-bestemte musik rækkeprincippet, skyldes det at han i sin undervisning, der hovedsagelig koncentrerede sig om analyse af fortidens storværker, bestandig søgte udover den blotte registrering af værkernes ydre overflade og ved indgående motivanalyse søgte at afdække indre, psykologiske sammenhænge mellem formdele, som den sædvanlige analyse ikke kunne konstatere. Det var især Beethovens og visse af Brahms værker, han på denne måde kulegravede. Han konstaterede, at alle selv de mest kontrasterende formelementer indenfor samme komposition meget ofte ad rækketeknisk vej kan føres tilbage til et grundmotiv eller motivkompleks, som hele værket er funderet på.