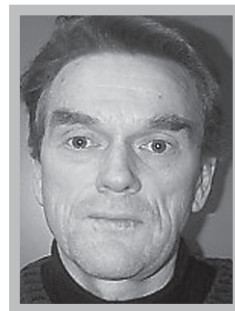


Om matematikk og musikk

Estetiske fag og matematikk

2. del

Af: Eystein Raude
Høgskolen i Vestfold, afd.
RI/LU
email: era@hive.no



Første del kan læses i Matilde 26 eller på adressen
http://www.matilde.mathematics.dk/arkiv/M26/M26-18_22Musik.pdf

2. Konsonans. Dissonans. Tonefarge. Overtoner.

2.1. Dissonans.

Anta at vi slår an samme streng, f.eks. den første, e-strengen, på to gitarer og at de er stemt likt. Vi slår an den løse strengen på den ene gitaren samtidig som vi presser ned den andre på ulike steder på gitarhalsen. De intervallene vi da skaper klinger noen ganger "godt" og andre ganger ikke så godt. Intervaller som klinger godt kalles **konsonante** og de som ikke klinger godt kalles **dissonante**.

Allerede Pythagoras kjente følgende betingelsene for konsonans: det er konsonans når forholdet mellom svingetallene for de to deltonene kan uttrykkes ved små hele tall under 7. Alle høyere svingetallsforhold gir dissonans. Derfor var det bare intervallene prim, oktav, kvart og kvint som ble betraktet som konsonante. Tersen ble antakelig godkjent som konsonans i England rundt 1290. Det går an å inndele musikkhistorien etter følgende skjema:

1. ca. 900 - ca. 1400, "før-ters-tiden"
2. ca. 1400 - ca. 1900, "ters-tiden"
3. etter 1900, "etter-ters-tiden".

Den tempererte kvinten som er 2 cents mindre enn den rene vil derfor få svingtallsforholdet $\frac{439}{293}$ og skulle etter definisjonen være svært dissonerende. Denne lille dissonansen som oppstår har imidlertid ingen betydning for alminnelig musikkpraksis (Benestad, 1985). I musikken er den kraftigste dissonans en liten sekund, $\frac{16}{15}$.

Musikkinstrumenter er mekaniske gjenstander som kan frambringe spesielle vibrasjoner som øret oppfatter som lyder. Det er tre kategorier instrumenter: strenge-, blåse- og slaginstrumenter. Hva er det som gjør at vi hører forskjell på ulike instrumenter som frambringer "samme" tone? Det skyldes at ulike instrumenters toner har ulik "farge", noe som henger sammen med tilstedeværelsen av overtoner og deres innbyrdes styrkeforhold. En gitarstreng festet i begge ender kan ha periodiske bevegelser, såkalte *sinusbølger*, men bare med bestemte frekvenser, nemlig grunntonens og dens overtoner, som har frekvenser som er et helt antall av grunntonens frekvens. Dersom grunntonens frekvens er f_0 , vil første overtone ha frekvensen $f_1 = 2 \cdot f_0$, andre overtone frekvensen $f_2 = 3 \cdot f_0$, o.s.v. for de andre overtonene. Ved hjelp av elektronisk apparatur kan en undersøke hvilke frekvenser som er med i en tone/lyd og deres styrkeforhold, en såkalt *Fourieroppløsning*. Det kan derfor være hensiktsmessig å si at toner lyder konsonante når de har overtoner med samme frekvenser. Toner lyder dissonante dersom deres overtoner har frekvenser som er nær hverandre, men langt nok fra hverandre til å skape raske "svevinger" mellom dem.

Dersom vi har to lydbølger med frekvenser, f_1 og f_2 , vil de gi opphav til en resultantbølge med en gjennomsnittlig frekvens på $\frac{f_1 + f_2}{2}$ som svinger i styrke med frekvensen $f_1 - f_2$. Når disse to tonene har omtrent samme styrke eller amplitude høres det ut som én tone der styrken varierer rytmisk, eller "svever". Frekvensforskjellen må være liten, 10 Hz eller mindre, for å høre en tone med middelfrekvensen. Når differensen mellom de to frekvensene øker, øker også svevingens hastighet. Ved observasjon av svevinger kan en lett justere en av de to frekvensene slik at de får samme tone, dvs. ingen sveving. Dette er en av de metoder som brukes ved stemming av strengeinstrumenter

2.1.1. Et eksempel.

Det er lett å verifisere overtoneforholdene ved hjelp av noen enkle forsøk på et piano. Tonen c^1 , dvs. enstrøket c, finner vi midt på pianoet. Går vi to oktaver ned, til C, er rekken av overtoner fra denne: c (nr.1), g, c^1 , e^1 , g^1 , b^1 , c^2 , d^2 , e^2 , $fiss^2$, g^2 , a^2 , b^2 , h^2 , c^3 , osv. (Overtonene nr. 6, 10, 12 og 13 klinger litt

lavere enn de toner på et temperert instrument som notene refererer til.) Vi tar for oss de tre c - ene C , c og c^1 og g - ene rett over disse. Grunntonene vil da ha følgende relative frekvensforhold:

$C - 2 \quad G - 3$

$c - 4 \quad g - 6$

$c^1 - 8 \quad g^1 - 12$

Press c forsiktig ned uten at den klinger og uten å bruke demperen. Slå deretter an C . Den vil da produsere sin egen grunntone og *noe* første overtone. Den første overtonen vil få c til å vibrere. Dersom vi demper C , uten å slippe opp c , vil vi høre c svakt mens den dør bort. På samme måte vil den tredje partialtonen til C sette g i svingninger. Eller den 6. partialtonen til C kan sette g^1 i svingninger.

Et litt annet resultat kan oppnås dersom vi presser G forsiktig ned og slår an c . Den tredje partialtonen til c vil korrespondere med den fjerde partialtonen til G , slik at *bare* den fjerde partialtonen til G vil bli eksitert. (1. overtone tilsvarer 2. partialtone.) Det er lett å tenke seg mange flere kombinasjoner i denne leken. Til slutt: trykk ned tonene $c^1 - e^1 - g^1$ stumt på klaveret og slå deretter kraftig an C . Så lenge tonene $c^1 - e^1 - g^1$ holdes nede, vil de klinge svakt, selv om de ikke er slått an, og selv etter at tangenten C er løftet opp.

Skulle vi kunne si da at "konsonans er sammenfall av overtoner"? Hva er så grunnene til konsonansopplevelsen? Rene toner (uten overtoner) nøyte plassert i det rette forholdet gir ikke opplevelsen konsonans! Tilpasser øret overtonene eller utfører det aritmetikk når vi bestemmer at vi liker en lyd?

2.2. Svinginger.

Til slutt litt om "svinginger": Vi sa at styrken på svevingen svingte med frekvensen $f_1 - f_2$, dvs. med frekvensen gitt ved differensen mellom de tonenes frekvenser. Anta at vi har to bølger $A_1 \cdot e^{i\omega_1 t}$ og $A_2 \cdot e^{i\omega_2 t}$ der ω_1 og ω_2 er vinkelfrekvensene og A_1 og A_2 er amplitudene. (Forholdet mellom vinkelfrekvensen ω og frekvensen f er 2π . Dersom tonens frekvens er 440 Hz, er den tilsvarende vinkelfrekvensen 880π eller omlag 5530 radianer per sekund.) Dersom vi adderer disse to bølgene og deretter regner ut den samlede bølges intensitet får vi

$$A_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{i\omega_2 t} \quad \text{og} \quad I = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)$$

Vi ser at intensiteten tiltar og avtar med frekvensen $\omega_1 - \omega_2$ og varierer mellom $A_1 + A_2$ og $A_1 - A_2$. Dersom amplitudene er forskjellige vil minimumsintensiteten aldri bli lik null. Effekten er lett å observere eksperimentelt. I det akustiske tilfellet kan vi sette opp to tonegeneratorer og la dem drive hver sin høyttaler. Vi kan på den måten motta en tone fra den ene og en annen tone fra den andre høyttaleren. Ved å endre tonenes frekvens i forhold til hverandre kan vi høre variasjoner i intensiteten. Desto lenger unna frekvensene er hverandre desto raskere er variasjonene. Øret har vanskeligheter med å oppfatte variasjoner raskere enn 5 til 10 svingninger per sekund.

2.3. Overtoner. Tonefarge.

Ulike instrumenter lyder ulikt alt etter hvilke overtoner som svinger med. Vi kan jo skille mellom en fiolin som gir en enstrøken a (a^1) og et piano som gir samme tone. Samtidig vet vi også at et spesifikt instrument gir samme tone, men med ulik farge avhengig av hvordan vi for eksempel blåser på det eller hvor vi slår an strengen. Andre faktorer som bestemmer klangfargen utenom svingningenes karakter, dempede eller udempede, transversale eller longitudinale, er instrumentenes form, hvilke materialer de er laget av, osv. La oss ta en svingende gitarstreng som eksempel. Vi vil slå an strengen dels på midten og dels for eksempel tre fjerdedeler fra halsens begynnelse.

Strengen utfører en periodisk bevegelse som gir opphav til en *periodisk lyd*, som vi kan representere med en passende kombinasjon av toner. Den svingende strengen er et lineært system og *enhver bevegelse kan analyseres ved å anta at den er en sum av bevegelser av alle mulige forskjellige bevegelsestilstander kombinert med passende amplituder og faser*. Dersom vi kaller strengens lengde L , vil grunntonens og overtonenes frekvenser være gitt ved løsningen av $\sin(kL) = 0$. k er svingtallet gitt ved antall bølgelengder per periode. En periode er representert ved vinkelmålet 2π radianer. Vinkelfrekvensen $\omega = 2\pi \cdot f$ der f er frekvensen. For strengen gjelder løsningen $kL = n\pi$, hvilket gir

$$\text{frekvensene } \omega_n = \frac{n \cdot \pi \cdot v}{L}. \quad v \text{ er bølgefarten på strengen.}$$

2.3.1. Fourieranalyse av en svingende streng.

Fourier, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fourier.html>, viste at en periodisk bevegelse kan uttrykkes som en sum av et antall enkle harmoniske funksjoner, som $\cos \omega x$, for hver av de forskjellige harmoniske frekvensene. En hvilken som helst funksjon med periode T kan derfor skrives matematisk som

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x \\ &+ a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x \\ &+ \dots + \dots \end{aligned}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. Koeffisientene, de ulike a-er og b-er, forteller hvor mye hver komponent er representert i svingingen $f(x)$. Da vi bare er interessert i området mellom 0 og L spiller det ingen rolle om vi velger sinus- eller cosinusutviklingen av den periodiske funksjonen. Vi beregner for eksempel b_n ved formelen

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Vi betrakter strengen som en lineær funksjon, $f(x) = ax$. Dersom vi trekker strengen et lite stykke $\frac{1}{2}\varepsilon L$ ut fra midten, vil de to halvdelene kunne skrives som $f(x) = \varepsilon x$ og $f(x) = \varepsilon(L - x)$.

Koeffisientene finner vi derfor ved å utføre integralet $b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx$:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^{L/2} \varepsilon x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \varepsilon(L - x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{4\varepsilon L}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

På samme måte finner vi koeffisientene når vi i stedet trekker strengen ut $\frac{3}{4}\varepsilon L$ i avstanden $3/4$ fra halsens begynnelse. Strengens funksjonsuttrykk blir i dette tilfelle $f(x) = \varepsilon x$ og $f(x) = 3\varepsilon(L - x)$ og integrasjonsgrensene 0, $\frac{3L}{4}$ og L . Resultatet blir

$$b_n = \frac{8\varepsilon L}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Vi ser her en av årsakene til at klangen endrer seg når vi endrer "angrepspunktet". Selve strengens bevegelse kan finnes ved å løse en éndimensjonal, separabel annen ordens differensiallikning. For en bestemt tid t er strengens form gitt ved uttrykket

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Bølgehastigheten på strengen er gitt ved $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, kvadratroten av spenning dividert med tetthet. Vi kan

altså doble en tones frekvens ved enten å halvere lengden eller firedoble spenningen. Det siste er ikke alltid så lett!

Den formelle løsningen for strengen strukket et stykke ut ved for eksempel $3/4$ av sin lengde blir

$$y(x, t) = \frac{8\varepsilon L}{\pi^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi vt}{L} \sin \frac{\pi x}{L} + \cos \frac{2\pi vt}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots \right]$$

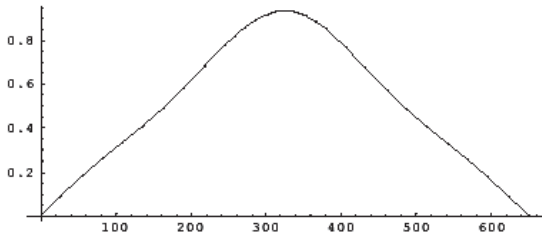
Startbetingelsene påvirker tonefargen, eller blandingen av alle frekvensene, men ikke grunnfrekvensen. Det er viktig å legge til at dette gjelder for relativt små utsving. Ved et kraftig anslag av strengen er det mulig i startfasen å høre et lite avvik fra tonens vanlige frekvens.

Vi vil bruke matematikkprogrammet MATEMATICA for å illustrere den tidsuavhengige delen gitt ved

$y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$ for gitarstrengen trukket et lite stykke ut på midten. Setter vi inn det tidligere

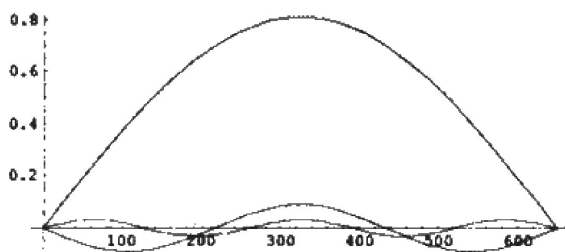
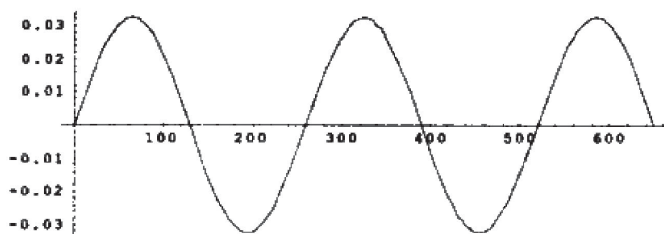
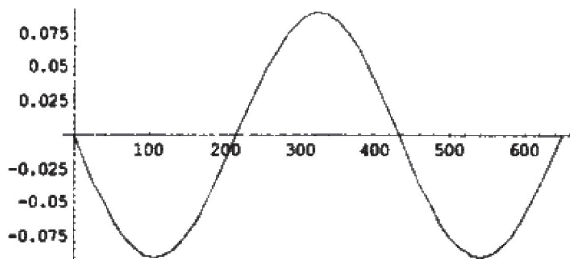
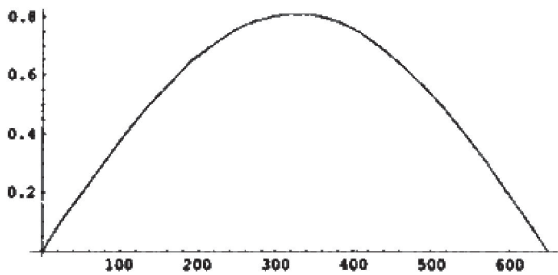
oppnådde resultatet får vi $y = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\varepsilon L}{n^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$.

En gitarstreng kan være 650 millimeter mellom de faste punktene. Dersom vi trekker for eksempel den første strengen (e-strengen) ut 1 millimeter, vil produktet $4\varepsilon L = 8$. Tar vi med de fem første svingtilstandene ser grafen til $f(x)$ slik ut:

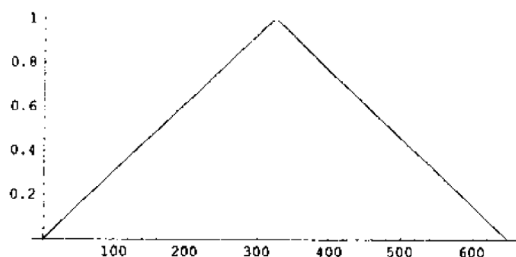


På grunn av faktoren $\sin(n\pi/2)$ vil de jevne ledd falle bort!

Vi lar MATEMATICA tegne de tre første tilstandene og deres sum:



Dersom vi tar med enda flere svingetilstander vil Fourierutviklingen gå mot den trekantformen som strengen hadde da den ble trukket ut i startfasen:



3. Melodien.

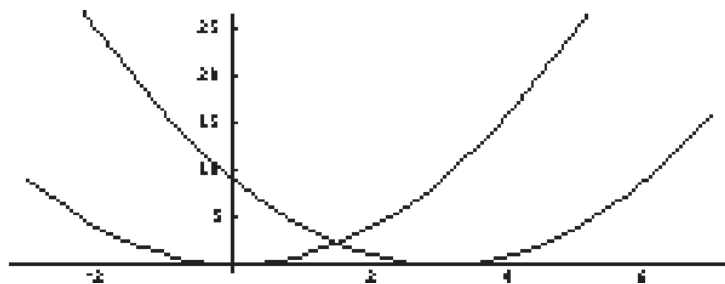
Komponering av et varig musikkstykke kan sammenliknes med det å skape et klassisk bilde eller en vel koordinert hage. Det er heller ikke ulikt ingeniørkunst. Det fins en underliggende struktur som er influert av matematikk.

For å få sammenheng i et musikkstykke kan det være nødvendig å gjenta en tonefølge - variert selvfølgelig, for å avverge kjedsomhet og gi komposisjonen karakter. Det er viktig at de transformerte gjentakelsene er gode for øret og interessante for tanken (Garland og Kahn, 1995).

Musikalske transformasjoner er nært knyttet til **geometriske transformasjoner**. I en geometrisk transformasjon endres verken form eller størrelse. Vi deler disse inn i fire typer.

3.1 Translasjon.

En geometrisk translasjon vil si å flytte en figur parallelt med en gitt retning en bestemt avstand. Det kan skrives ved hjelp av funksjonsnotasjonen som $y = f(x) \rightarrow y = f(x - a)$ der a angir forflytningens lengde. Som eksempel kan vi translater funksjonen $y = f(x) = x^2$ en avstand 3 mot høyre og få uttrykket $y = f(x) = (x - 3)^2$. Det vil se slik ut:

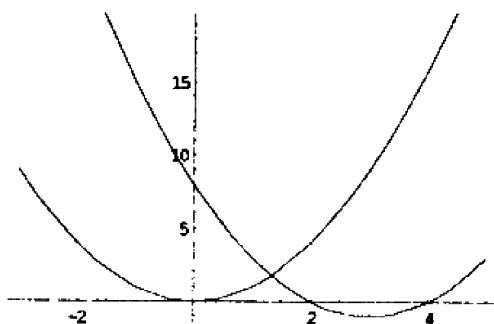


3.1.1 Den enkleste form for translasjon i musikk er repetisjon:



3.1.2 En noe mer sofistikert form er transposisjon der en tonerekke flyttes til et annet sted i skalaen:

Matematisk vil det si $y = f(x) \rightarrow y = f(x - a) - b$, og med vårt eksempel:



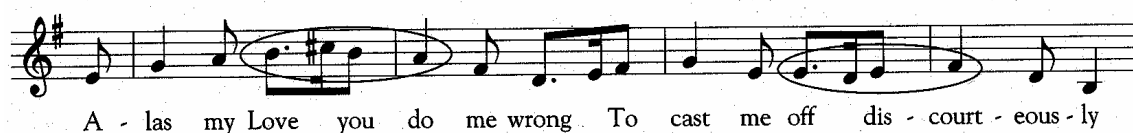
3.2 Refleksjon

En geometrisk refleksjon vil si å speile en figur om en akse, vertikalt eller horisontalt. Matematisk kan disse to typene skrives $y = f(x) \rightarrow y = f(-x)$ og $y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$. Musikalsk snakker vi om *retrogresjon* og *inversjon*.

3.2.1 Retrogresjon:

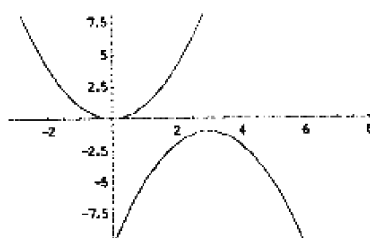
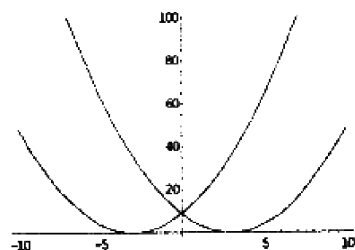


3.2.2 Inversjon:



Her er tonefølgen både translert, transponert og invertert.

Grafisk vil vi for refleksjon i disse tilfellene ha



Det siste tilfellet er såkalt *gliderefleksjon*, og i musikken kalles denne formen *retrograd inversjon*.

3.3 Seriell musikk.

I begynnelsen av det 20. århundre innførte bl.a. Arnold Schönberg (<http://212.186.218.4/english/as/as1.html>) en type musikk som var basert på at alle 12 toner i den tempererte skalaen var likeverdige, dvs. at de tradisjonelle tyngdepunktakkordene *tonika*, *subdominant* og *dominant* mistet sin betydning i den musikalske kadensen.

Det var imidlertid ikke likegyldig i hvilken rekkefølge de tolv tonene kom; ingen måtte gjentas før hele sekvensen var omme.

For å unngå monotoni ble grunnsekvensen transformert ved at man brukte både *retrogresjon*, *inversjon* og *retrograd inversjon*, nettopp de geometriske transformasjoner vi har beskrevet tidligere i 3.1 og 3.2.

3.3.1 De store tall (fakultetet) i musikken.

En seriell sekvens består av 12 toner. Hver av disse kan skrives i fire versjoner (original, retrograd, invertert og retrograd invertert). Av disse kan det da lages $4 \cdot 12! = 1916006400$ ulike melodier. En hel tre times opera har blitt skrevet ved å bruke den samme sekvensen på 12 noter i en rekke.

(Fakultetet av et tall skrives som tallet med et utropsteegn etter. For eksempel skrives 3 fakultet slik: $3!$, og betyr $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Dersom vi plasserer 3 personer etter hverandre i en rekke kan det gjøres på 6 måter: den første plassen kan velges av tre, den andre av to og den siste av én, og resultatet blir produktet av tallene 1, 2 og 3.)

Nedenfor vises en 12 – tonerekke og dens transformasjoner: Først den 12 toner lange sekvensen:



Deretter den samme speilvendt, invertert:



Temaet på nytt:



Deretter i baklengs eller retrograd bevegelse:



Temaet igjen:



Til slutt er temaet baklengs og speilvendt:



3.3.2 Fugen.

Fugen er en musikkform som har røtter tilbake i renessansen (ca.1300 – 1600)

(<http://www.medieval.org/emfaq/beginlst/renaiss.htm>).

J. S. Bach (<http://www.jsbach.org/websites.html>) skrev mange rene fuger og brukte ellers formen i mye av det han skrev. En fuge kan beskrives som "et musikkstykke basert på en kort tonerekke eller et tema som hele tiden dukker opp, skjønt noen ganger speilvendt, opp – ned eller speilvendt og opp – ned" (McLeish, 1982). Det berømte verket *Das Wohltemperierte Klavier* av J. S .Bach inneholder 24 fuger i alle de tolv dur- og molltoneartene som fins i den tempererte skala.

3.3.2.1 Et eksempel hos Mozart (<http://mozart.composers.net/>).

Kombinasjoner av musikalske transformasjoner karakteriserer mange velkjente melodier, inklusive *Joy to the World* av Georg Friedrich Händel (<http://bruichladdich.dcs.st-and.ac.uk/HandelWWW/HandelCat.html>) som starter med en flott nedadgående åttetoners rekke.

Et strålende eksempel på en rekke av transposisjon, retrogresjon, inversjon og retrograd inversjon finner vi dette utrolige stykke av Mozart (se neste side)

Meningen med stykket er at to utøvere skal sitte mot hverandre og spille fra hver sin ende av det. De leser da hverandres linjer opp – ned, og fordi det er et likt antall linjer vil de aldri spille den samme linje samtidig.

Mozart var matematisk anlagt, og han likte spill. Ta for eksempel på hans *Melodi Terning*. Spilleren hadde mulighet til å komponere en vals bestående av 16 takter, men komponeringen av hver av de 16 taktene ble bestemt av terningens "lynn". Mozart komponerte 11 forskjellige muligheter (tilsvarende tallene fra 2 til 12 som framkommer med to terninger) for hver av de 14 taktene, 2 muligheter for en av taktene og den siste takten var bestemt. Det vil derfor være mulig å spille $1 \cdot 2 \cdot 11^{14}$ versjoner av denne valsen!

3.3.2.2 Ringebytte i England.

I små landsbyer i England har man en lang og elsket tradisjon på å ringe nedadgående skalaer om igjen og om fra kirker, det være seg til glade eller sørgelige hendelser. Noen ringere byttet om på den rekkefølgen klokkene ble ringt i, for ikke å forgå av kjedsomhet. Derav navnet *ringebytte*.

Antall klokker kunne variere fra 5 til 12. Med 5 klokker ville det da bli $5! = 120$ forskjellige rekkefølger for ringingen. 120 rekkefølger med 5 toner i hver rekkefølge gir 600 toner. Med en fart på 144 per minutt vil ringingen ta over 4 minutter. Hvor lang tid ville det ta med 12 klokker?

4. Rytmen.

Rytmen er basisen i musikken. Rytme skapes når tidskontinuumet brytes opp i deler av lyd eller bevegelse.

4.1 Taktarter og noteverdier. Enkel brøkregning.

Rytme måler tid. For dette formål brukes tradisjonelt *takter* og *tidsmål*. Taktene måler like lange tider. Hver takt deles opp i like lange *slag*. Et musikkstykke i fire firedels takt har altså 4 slag i takten og en takt består av 4 firedels noter.

Noteverdier gir et godt utgangspunkt for enkel brøkgregning og man kan lett forvisse seg om en takt inneholder den sammenlagt rette verdien ved å addere brøker med ulike verdier. Dette gjelder både noter og pauser. Punkterte noter og pauser er et naturlig utgangspunkt for halvering av brøker.

Allegro

Mozart

Mozart

Allegro



Eksempler som disse nedenfor kan være aktuelle som øvinger:

Teaching Music and Math using Cuisenaire rods.

$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ of } \frac{1}{2}$

$\frac{3}{8} = \frac{3}{4} \text{ of } \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \text{ of } \frac{1}{4}$

og/eller:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{8} > \frac{3}{4}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{16} > \frac{3}{4}$

4.2 Rytme og motrytme. Minste felles multiplum.

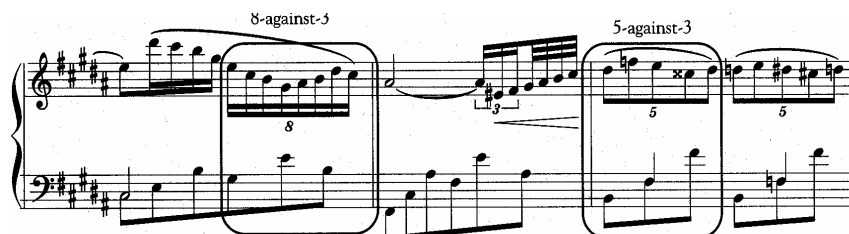
Uansett hvor komplisert en musikalsk rytme måtte være kan den analyseres matematisk. En av de vanskeligste utfordringene er å spille én rytme mot en annen samtidig. Dette kalles gjerne "2 mot 3", og går ut på at den rytmiske syklusen deler den gitte tidsperioden opp i *ulike* delinger

Dersom taktarten er 3/4, må takten deles inn i 6, som er minste felles mål for 2 og 3. Utøveren kan for eksempel telle "en og to og tre og" og slagene må gå slik:

En (og) to (og) tre (og)

En to hvor altså slaget i den ene hånden kommer på og-et i den andre (altså mellom slagene i den andre hånden).

Nedenfor er vist et par andre eksempler (8 mot 3 og 5 mot 3):



5. Kuriositeter.

5.1 Fibonacci-tall. Det gylne snitt.

Som en kuriøs forbindelse mellom matematikk og musikk kan nevnes fibonacci-tallene.

Tallene som er en uendelig følge, har fått sitt navn etter matematikeren Leonardo av Pisa, <http://www.lib.virginia.edu/science/parshall/fibonacc.html>, som levde på 1200 tallet e.Kr.

Tallfølgen starter slik: 1, 1, 2, 3, 5, 8,der hvert tall i følgen er summen av de to foregående.

Forholdet mellom to fibonacci-tallene nærmer seg tallet $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,61803398875$, som også går under

betegnelsen *det gylne snitt*. Det gylne snitt gjenfinner vi i naturen og brukt bl.a. i arkitektur og bildende kunst; men også i musikken.

Den ungarske komponisten Béla Bartók (<http://www.classical.net/music/comp.lst/bartok.html>) brukte det som en teknikk i utformingen av sine komposisjoner. I første sats fra *Musikk for Strykere, Slagverk og Celesta* har han følgende inndeling av de 89 taktene:

55 takter blir sterkere→		34 takter	
34 takter Temaet er 21 takter strykerne fjerne demper etter 34 →	21 takter	13 takter strykerne tar igjen på demper etter 13 takter→	21 takter 13 takter + 8 takter

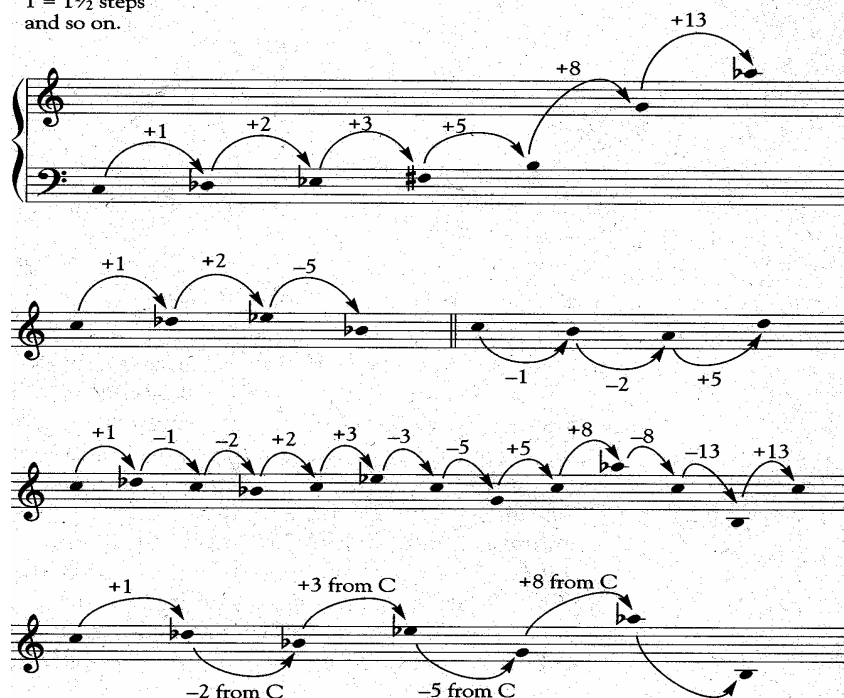
Første sats i L. van Beethoven's 5.symfoni er også inndelt ved hjelp av fibonacci-tall, og det gylne snitt fins i forholdet mellom satsen deler: <http://www2.lucidcafe.com/lucidcafe/library/95dec/beethoven.html>

Bankemotivet i første sats: 5 takter. Deretter 372 takter før bankemotivet kommer igjen med 5 takter. Videre 228

takter pluss 5 taktens bankemotiv. Det gir forholdene $\frac{228}{372} \approx 0,613$ og $\frac{233}{377} \approx 0,618$.

Noen ganger er fibonacci-tallene brukt til å skape rytmiske forandringer eller utvikle melodilinj. *Joseph Schillinger* (<http://www.peabody.jhu.edu/current/js/js.htm>) var talsmann for denne teknikken. Schillinger-systemet er mye brukt i dag. Det består i å hoppe rundt i skalaen i halve trinn som er fibonacci-tall. Som eksemplet viser:

KEY
 1 = ½ step
 1 = 1 step
 1 = 1½ steps
 and so on.



Béla Bartók hadde sin "fibonacci-skala": 1, 2, 3, 5, 8, 13: alle tall i antall halve trinn fra grunntonen.

En undersøkelse av akkorder, spesielt de "vakre", viser på enda en opptreden av fibonacci-tall. De intervallene som av mange oppfattes som mest tiltalende for øret, er stor og liten sekst. Frekvensforholdene for disse intervallene i den

tempererte skala er (regnet fra c^1 til a^1) $\frac{264}{440} = 0,6 = \frac{3}{5}$, et fibonacci-forhold, og $\frac{330}{528} = 0,625 = \frac{5}{8}$, (regnet fra

$e^1 - c^2$) nok et fibonacci-forhold!

5.2 Stokastisk musikk.

Stokastisk betyr tilfeldig. Et kast med terning(er) gir tilfeldige utfall.

Stokastisk musikk oppstår når en *algoritme* (framgangsmåte) som definerer musikkestilen blir brukt på en samling tilfeldige utfall(f.eks. en melodi bestående av en samling tilfeldige noter). (Vi så tidligere et nærliggende eksempel hos Mozart!)

Algoritmen kan likne eksisterende regler for en bestemt stil (barokk eller jazz), regler brukt av en bestemt komponist (Bartók eller Gershwin), eller regler som er innbakt i et spesielt musikkstykke. Reglene kan til og med være helt løsrevet fra hittil skapt musikk.

Komponering av stokastisk musikk involverer en vekselvirkning mellom menneske og maskin(ev. en terning). Komponisten skaper reglene i følge den stil hun/han ønsker i musikken, og maskinen genererer tallene (som korresponderer med noter, rytme, osv.) og innforliver dem etter komponistens regler.

Det viser seg at graden av korrelasjon mellom menneske og maskin i en komposisjon har stor betydning for hvordan musikken vil lyde. I den ene enden av skalaen har vi *hvit støy* (bruset i radioen eller i televisjonsapparatet når det ikke er sending, eller lyden av regndråper mot taket).

Hvit støy kan vi lage ved f.eks. å kaste pil mot en måltavle som er inndelt i syv deler, der hver del representerer de syv notene i en skala.

I den andre enden av spektret har vi *brun støy*, oppkalt etter de "brownske bevegelser" som i fysikken beskriver den "tilfeldige gange" støvpartikler i et flytende medium utfører når molekylene tilfeldig skyver dem rundt. Den "brune melodien" er deterministisk i den forstand at den "husker" noten som den nettopp forlot, på samme måte som støvpartikkelen "husker" hvor den nettopp befant seg.

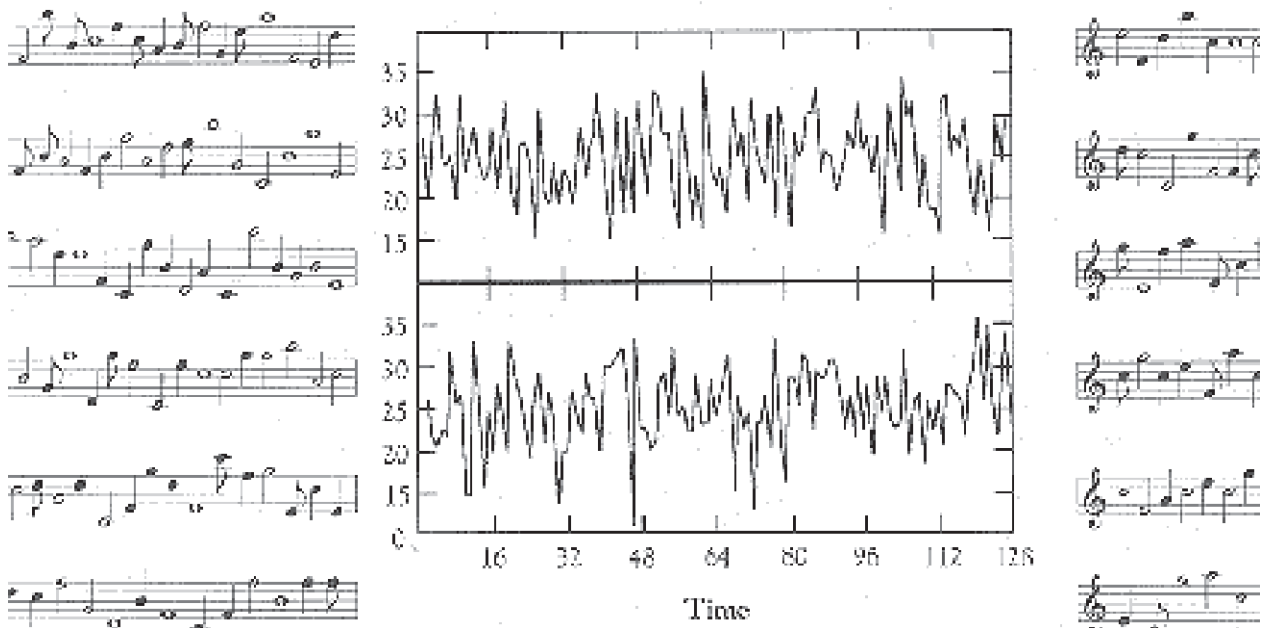
Å skape brun musikk kan gjøres ved å gi de syv feltene på måltavlen tall fra -3 til +3, noe som skal indikere antall halve trinn til neste note. På denne måten blir alle notene helt avhengig av den foregående.

Hvit musikk er helt tilfeldig og uinteressant, brun musikk er kjedelig og overkorrellert.

Støy som ligger mellom hvit og brun kalles *fluktuerende*. Den manifesterer seg i naturen, men ikke alltid som lyd. Den har blitt funnet i solflekaktiviteten, i elektriske strømmer i nervemembraner, i veksten i årringer på trær, i Nilens flodnivåer; og alle viser samme type støy.

Mot slutten av 1970-tallet påviste to amerikanske fysikere, R.F.Voss og J. Clark (Voss og Clark, 1978), http://linkage.rockefeller.edu/wli/1fnoise/1fnoise_prop.html, at nesten all musikk, inklusive Bach's komposisjoner, indiske ragaer og Beatles sanger viser fluktuasjoner. Musikk av denne type kalles "rosa", fordi den ligger mellom brun og hvit musikk. De fleste foretrekker rosa musikk fordi den har nettopp så mye "tilfeldig" i seg at den virker interessant og akkurat stor nok grad av korrelasjon til å gi en følelse av struktur.

Her er eksempler på hvit og brun musikk:



5.3 Hva er kunst?

Til slutt: er f.eks. rosa musikk *kunst*? Hva karakteriserer et stykke musikk som har fått etiketten *kunst* hengende på seg? Er det ballansen mellom kompleksitet og enkelhet, spenning og avspenning, kaos og orden? Vil vi noen gang kunne beskrive *skjønnhet* ved hjelp av en matematisk formel, eller vil datamaskiner kunne skape en så "god" musikk som mennesket?

Referanser:

Encyclopedia Britannica, Inc., Online.

Bjørklund, Alf: Elementær musikalsk akustikk; Aschehoug & Co., 1966.

Garland, Trudi Hammel and Kahn, Charity Vaughan: Math and music; Dale Seymour Publ., 1995.

Benestad, Finn: Musikkklære; Tano A/S, 1985.

Feynman, Richard P.: The Feynman lectures on physics, Addison-Wesley, Publishing Company, 1963.

Rignes, Truls: Klassisk og moderne astronomi, Aschehoug, 1978

Voss, R.F and Clark, J.: "1/f noise in music: Music from 1/f noise." The Journal of the Acoustic Society of America 63, No.1(January 1978): 258-263.

Wittgenstein, Ludwig: Filosofiske undersøkelser; Pax Forlag A/S, 1997.