Beskriv klangen!

Materiale på http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/overtoner/index.htm

Indledning

Ideen i dette papir er, at vi vil prøve at splitte en tone op i enkeltbestanddele og derefter prøve at genskabe den syntetisk.

Lad det være sagt med det samme. Vi kan ikke genskabe en tone fuldstændig som den lyder i virkeligheden, men vi kan beskrive de elementer, der er i en tone, og vi kan genskabe så mange af dem, som det nu er muligt. Samtidig kan vi så sætte ord på både det vi kan indfange og det vi ikke kan.

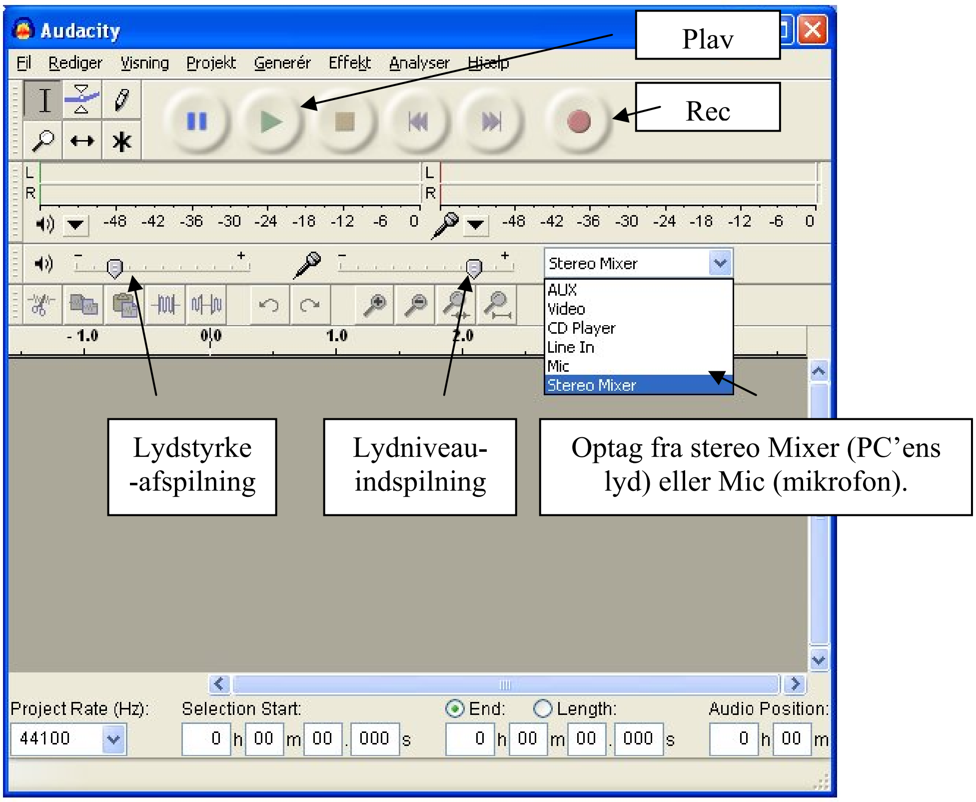
Udgangspunktet er at vi har en tone på digital form. Det kan enten være en tone du optager, eller det kan være en tone du henter fra en lydfil. Det er vigtigt at du vælger en enkelt tone ud, og får klippet din tone ud, så du kun har den for sig selv. Den meget store fordel ved at arbejde med en tone du har som mp3-fil eller wav-fil er, at alt hvad du laver vil kunne rekonstrueres. Hvis du går ind og analyserer på hvordan tonen lyder i tidsrummet 0.645 sek til 0.650 sek, så kan du selv eller andre gå hen og gøre dette igen, hvis man får brug for det. Det forudsætter bare at man har samme lyd-klip, som du har brugt.

For at kunne optage og for at kunne redigere i lydklip bruger vi programmet Audacity. Lad os starte med at se lidt på det.

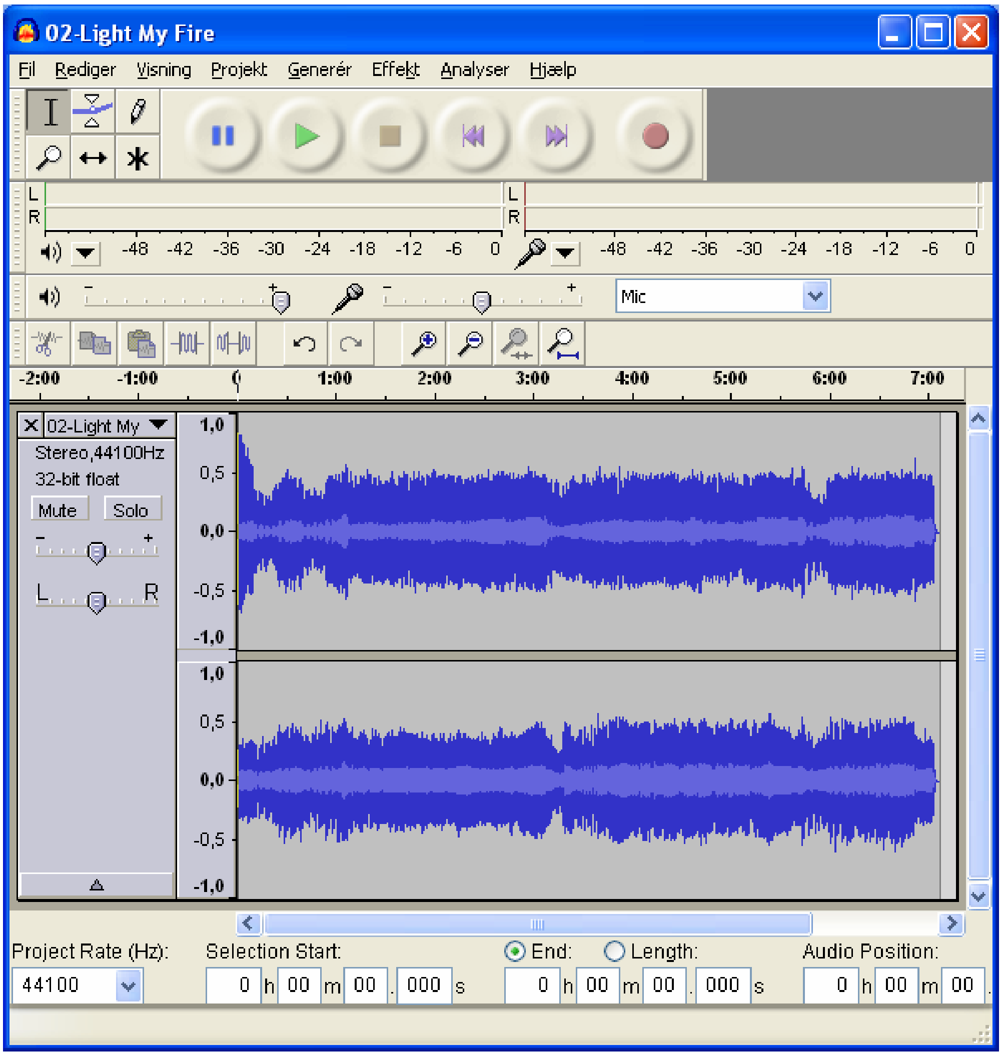
Audacity

Du kan hente freeware-programmet Audacity på http://audacity.sourceforge.net/
Denne vejledning er lavet med Audacity 1.3 beta, men de forskellige udgaver ligner hinanden meget.

Når du åbner programmet Audacity får du følgende brugerflade:

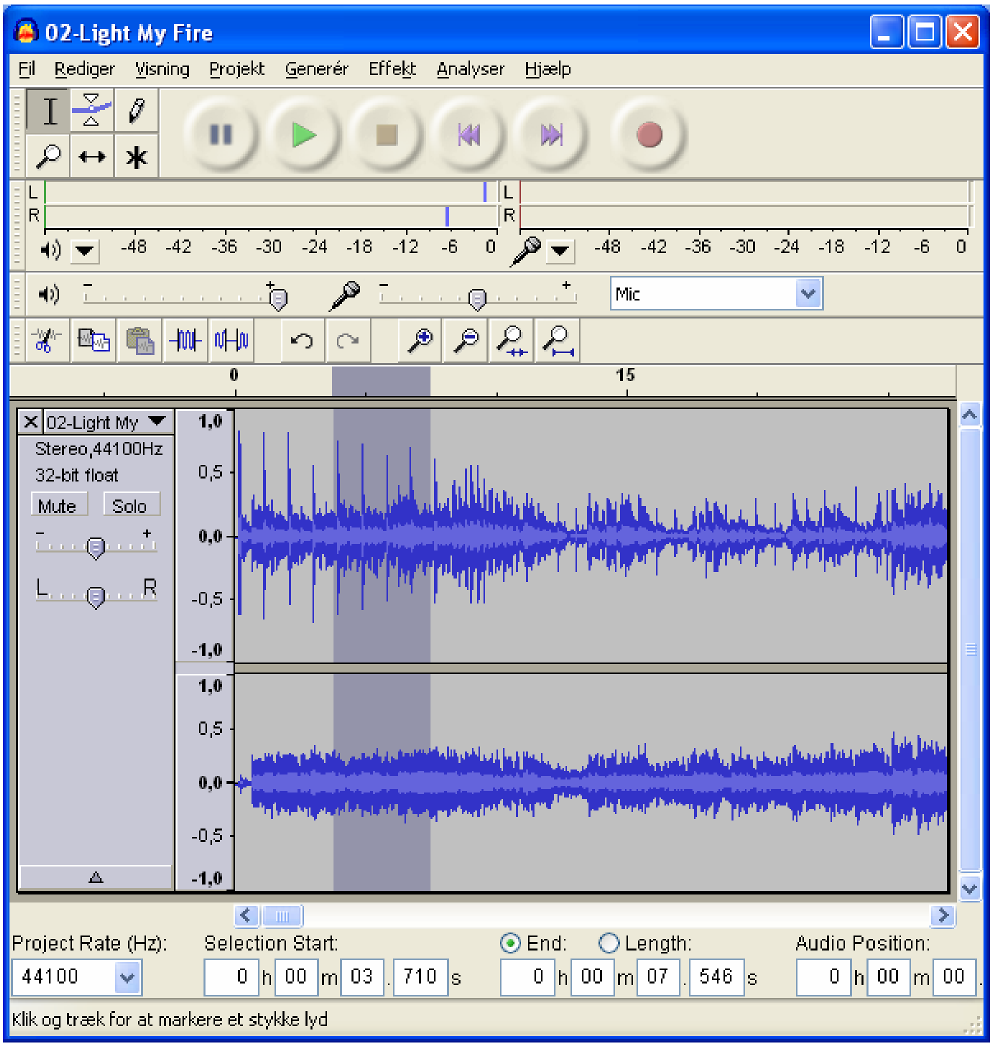


Hvis du har en lydfil du vil hente din tone fra, kan du gå ind under menuen **File** og vælg **Åben**. Vælg en wav-fil eller en mp3-fil, som du ønsker at klippe i. Derefter vises følgende skærmbillede, der viser højre og venstre spor (hvis lyden er optaget i stereo). Tryk på **PLAY:**



Zoom-værktøjet er oven over det store vindue. Her kan man Zoome ind og ud i forhold til den stiplede linje på de to første knapper. På de to sidste kan man Zoome ind til et afmærket område og zoome ud til hele nummeret. Prøv dig lidt frem:

En anden måde at zoome på er ved at holde CTRL nede og så scrolle!



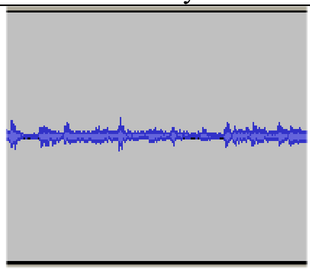
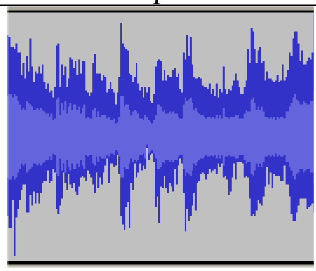
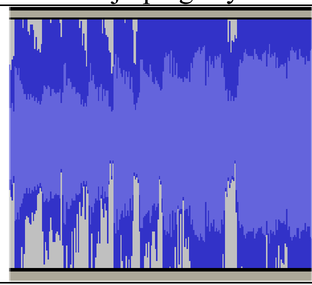
Prøv at markere et område i nummeret ved at trække musen med venstre muse-knap nede. Det markerede område vil nu vise sig som gråt.

Når du nu trykker på mellemrumstangenten eller på **PLAY**, vil du høre netop det markerede udsnit. Du kan "klippe" dette afsnit ud med **ctrl+c** og så gemme det som en ny fil med **ctrl+**n, for at få en ny fil, og **ctrl+**v for at indsætte.

Når du har din lyd færdig vælger du **Eksporter som Wav** eller **Eksporter som Mp3**. Det betyder ikke noget hvilket format du vælger til dette formål. Kvaliteten af Wav er bedre, men du kan ikke høre forskel! Mp3 er et fantastisk komprimeret format, så alt hvad der skal sendes eller uploades til nettet, kører meget bedre med Mp3, men dit lydklip her er måske på 3-4 sekunder, så det betyder ikke noget.

Du kan også fjerne det du vil have væk i stedet for at udvælge det du vil bruge. Prøv at afmærke noget du vil slette og tryk **Delete**. Du kan altid fortryde de sidste handlinger med **ctrl+z**.

Prøv også at optage med Audacity. Stil "kanalvælgeren" til **Stereo Mixer**. Nu optager den al den lyd der kommer ud af PC'en. Du kan sætte en CD i og afspille den, og optage den samtidig. Du kan også gå ind på www.dr.dk og optage et nyhedsindslag.
Bemærk at du her skal justere styrken. Du kan både justere på optage-styrken og afspilning

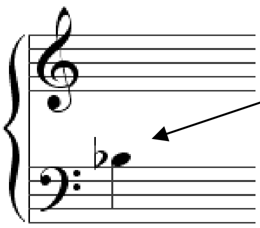
for lav styrke	tilpas	for høj optagestyrke
		

Hvis du har en mikrofon, kan du også prøve at sætte den til mikrofonindgangen og optage lyden. Her skal kanalvælgeren stå på **Mic**.

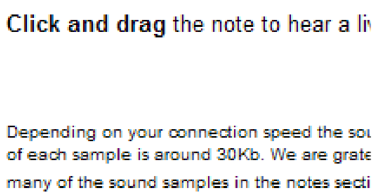
Find dig en tone!

Det er vigtigt at vi har den tone vi vil arbejde med i digital form. Du kan sagtens optage noget selv, men der er mange frit tilgængelige muligheder. Jeg vil her demonstrere to oplagte muligheder.

Optag en tone fra nettet.
Du kan vælge at optage en tone fra en hjemmeside. Mange hjemmesider giver mulighed for at høre lydeksempler. Vi skal først se hordan vi kan *optage* en lyd
http://www.compositiontoday.com/sound_bank/cello/cello.asp



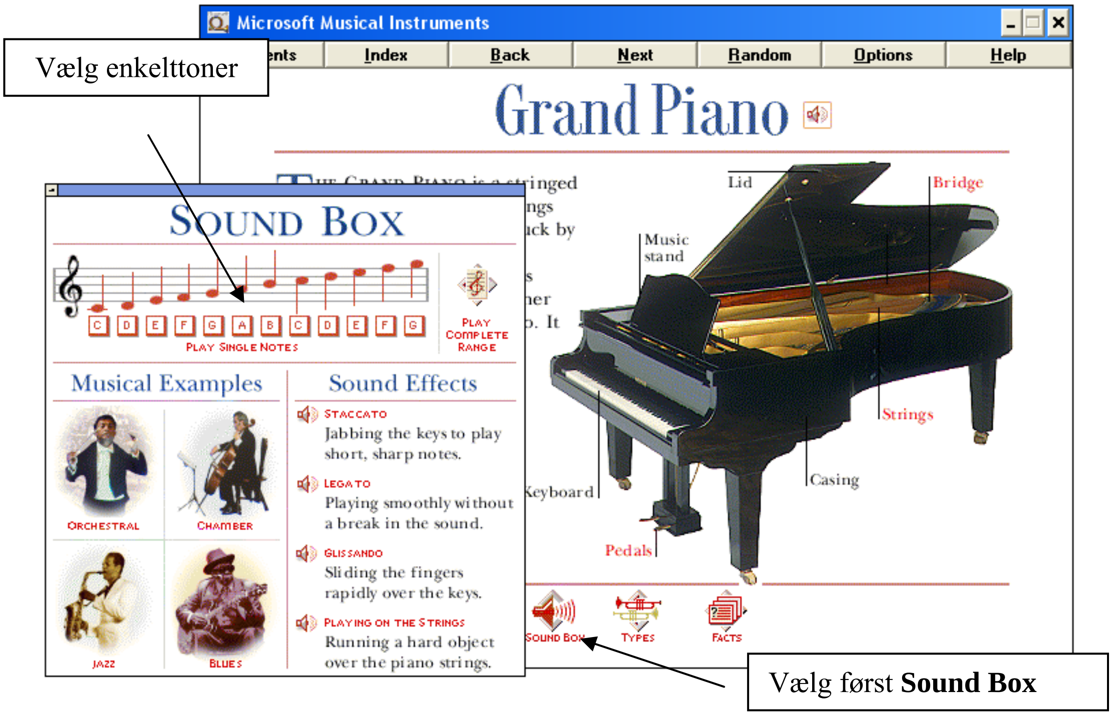
Flyt på tonen for at høre lyden



Vælg instrumentet

Der er MANGE andre lydbanker på nettet. Søg evt på fx *oboe* og *sound*

Optag tone fra Musical Instruments.
Hvis Musical Instruments er installeret på din PC, kan du åbne det og gå ind i **Index** og vælge et instrument. Her får du mulighed for at høre og optage enkelttoner med dit instrument endda i forskellige tonehøjder.



Se på din tone!

Når du har fundet et passende lydklip du vil analyse, og du har klikket evt pauser fra henter du den ind i Audacity. Du skal gå ind i Audacity og vælge **Fil** og **Åben**. Det er en god ide at lukke de andre udgaver af Audacity først.

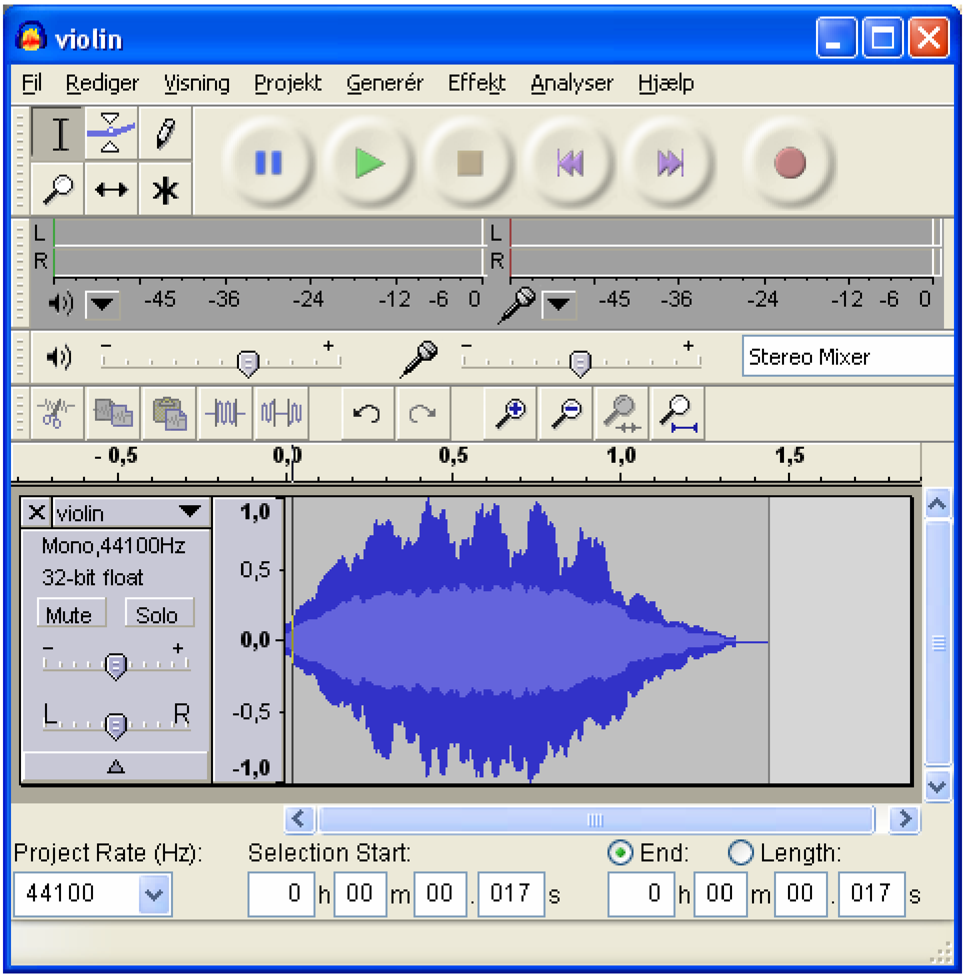
Jeg har fundet en tone fra en violin, og vil prøve at analysere den og genskabe den kunstigt.

Når man skal arbejde med dette er det en stor fordel at kunne fastholde og dokumentere præcis hvad man arbejder med. Det gør man bl.a. ved at benytte *screen-dumps*,

For at vise hvordan tonen ser ud, når jeg har åbnet den i Audacity, trykker jeg på **alt+printscreen**. Knappen **printscreen** sidder typisk øverst i højre side af dit tastatur. På nogle keyboards hedder den bare **Prt Scr**.

Nu er der ”taget et billede af tonegeneratoren, og det indsætter du i et dokument eller en powerpoint ved **ctrl+v** eller ved **sæt ind/paste.**

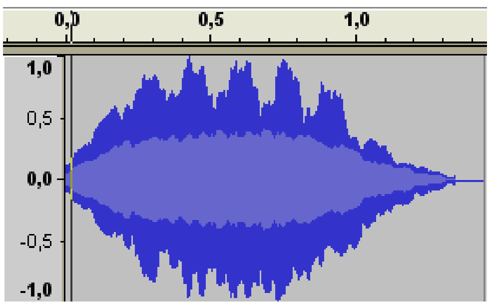
Resultatet er følgende:



Du kan hente violintonen på http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/overtoner/violin.mp3
Så kan du prøve selv.

Bemærk at det kun er Audacity-fladen der kommer med. Hvis jeg kun havde trykket **printscreen** kommer hele skærmen med. Når man trykker **alt-printscreen**, er det det program, der sidst har været aktivt. Hvis du altså får indsat noget helt andet end du forestillede dig, skal du klikke på Audacity, så det er aktivt, og så trykke **alt-printscreen** for at affotografere og **ctrl+v** for at indsætte i et dokument eller lignende.

Der er en hel del overflødigt i billedet ovenfor, så hvis du vil spare på pladsen, kan du i stedet åbne billedet i et billedbehandlingsprogram og klippe det ud du skal bruge. Du kan læse lidt mere om hvordan du gør det på http://www.frborg-gymhf.dk/gj/manualer/Screendumps.doc



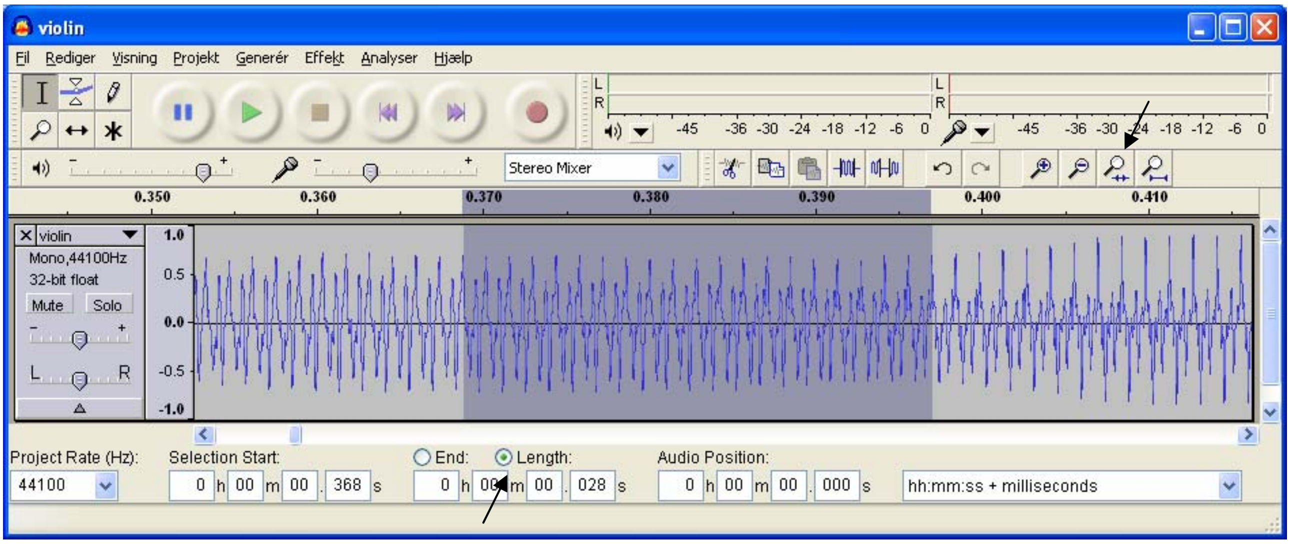
Enheden på x-aksen er sekunder. Vi kan se at tonen her varer omkring 1.3 sek. Der er ikke en bestemt enheden på y-aksen, men den angiver *amplituden* for den svingning, tonen kan beskrives som. Den er tæt forbundet med tonens *styrke*. Vi hører altså en tone, der vokser hurtigt frem, og derefter klinger ud.

Brug nu zoom-værktøjet til at zoome ind på denne tone. Det letteste er at klikke en enkeltgang på tonen, og så scrolle. Du kan også benytte knapperne

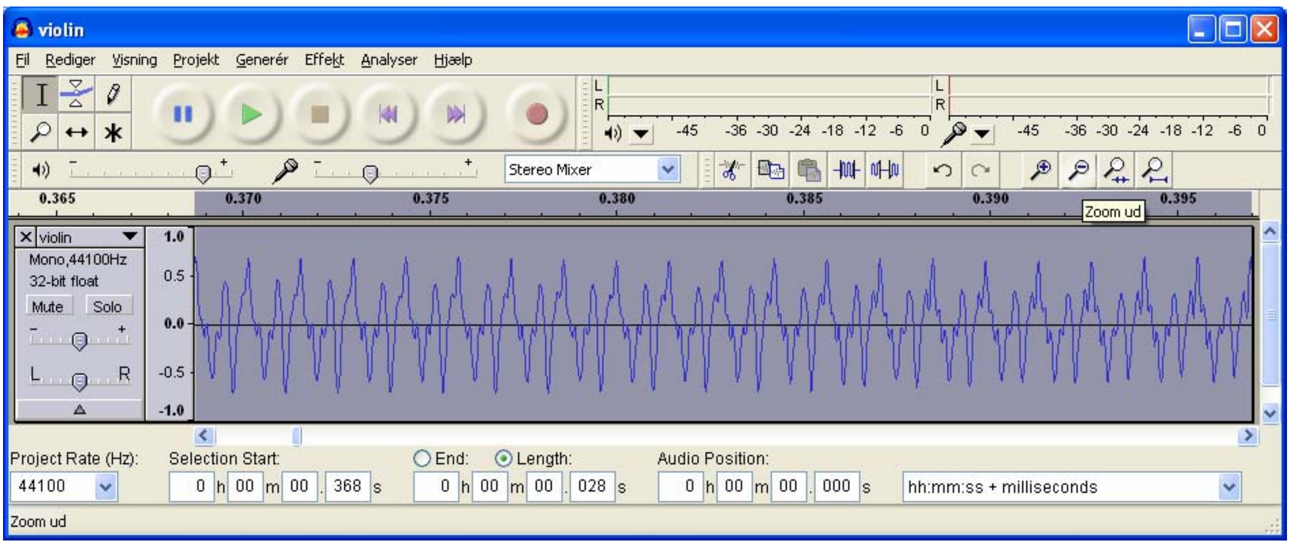
På de to sidste kan man Zoome ind til et afmærket område og zoome ud til hele nummeret.

Samtidig er det hensigtsmæssigt at trække det vindue som Audacity vises i ud, så det får skærmens bredde, og samtidig gøre det så smalt, at der ikke er noget overflødig plads under grafen.

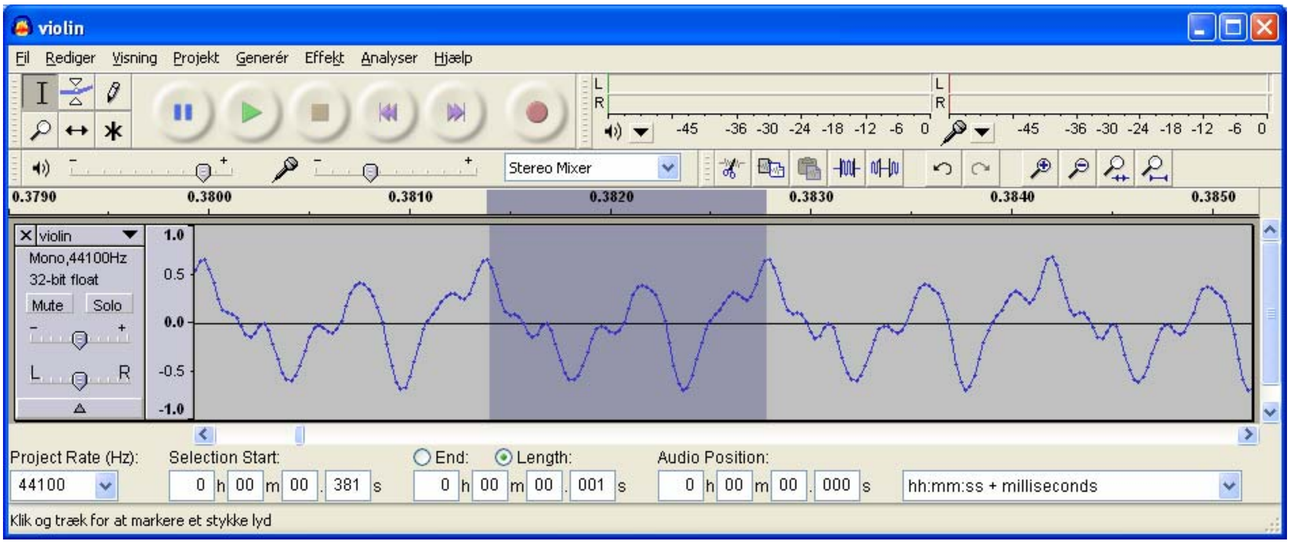
Nedenfor har jeg zoom'et ind og afmærket præcis 20 perioder af vores svingning. Bemærk at jeg i linien under grafen har valgt at se *length* (længden af det markerede stykke)



Når jeg nu trykker på den Zoomknap, der tilpasser vinduet til det markerede får jeg et billede kun af disse 20 svingninger



Zoomer vi endnu længere ind kan vi få et billede af den enkelte periode. Nedenfor er der zoomet ind så vi ser 3½ periode i vinduet. Samtidig er den ene periode afmærket, så vi kan zoome ind på den.



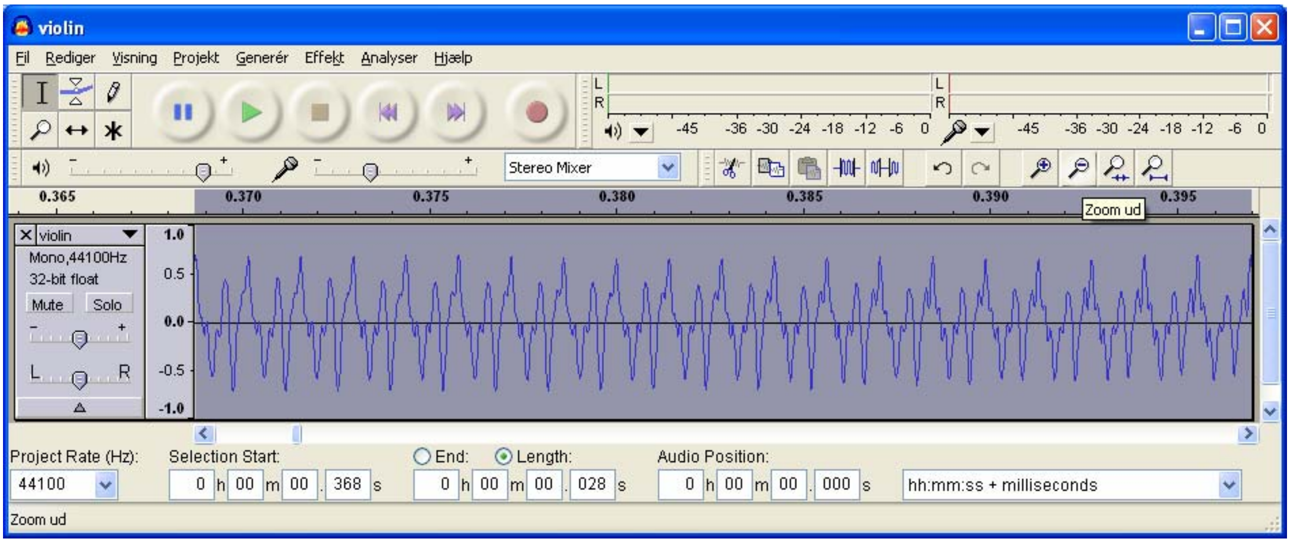
1.del af analysen – bestemmelse af frekvensen

Vi skal på side 17 se på en udvidet matematisk beskrivelse af en tone. Her vil vi nøjes med at sige, at når vi har fundet det svingningsmønster der gentages, så angiver *frekvensen* antallet af svingninger pr sekund og *svingningstiden* angiver antal sekunder hver svingning tager.

Vi angiver frekvensen med ω (udtales *omega*) og svingningstiden med *T*. Da vi har 1 svingning på *T* sekunder, er det klart at antal svingninger pr sekund kan bestemmes som

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{T}}$$

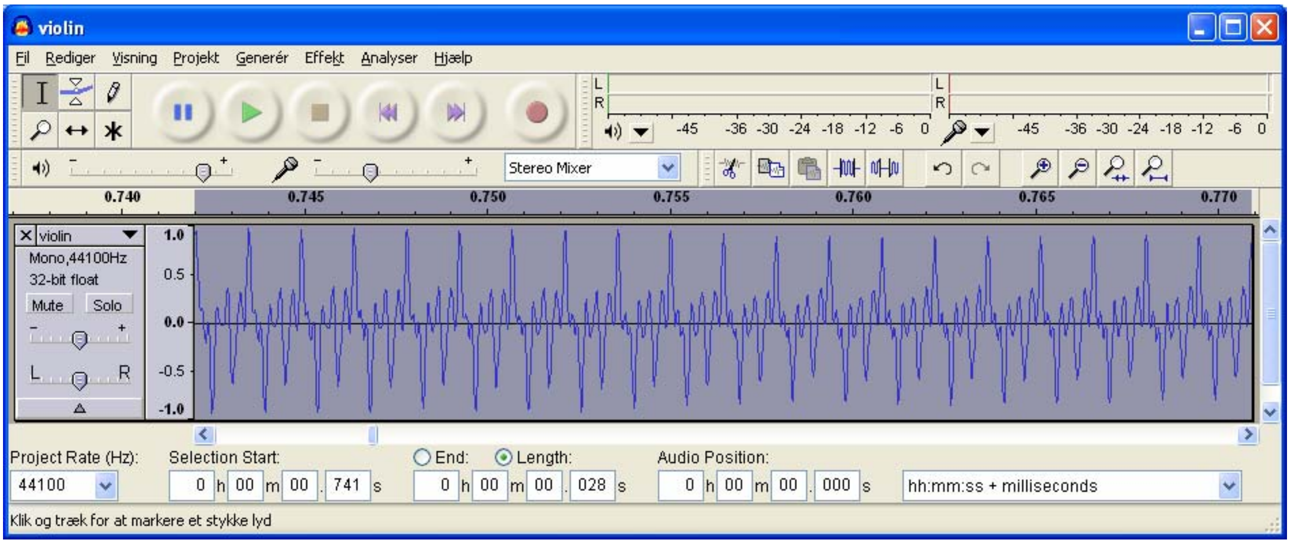
Lad os derfor se på frekvensen for den tone vi har set på ovenfor.



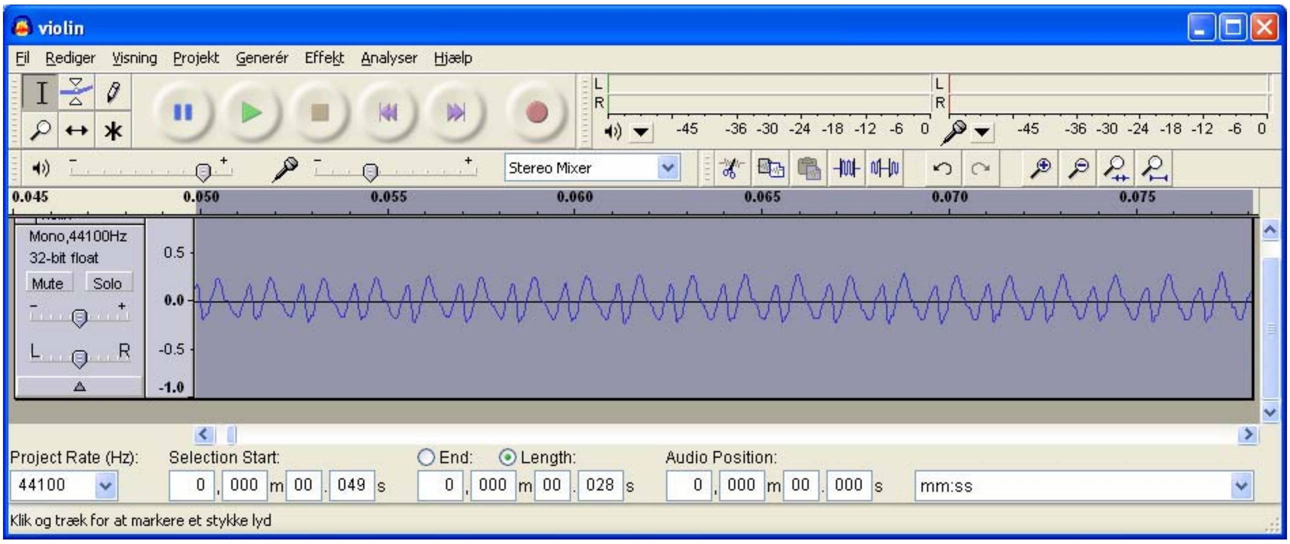
Her så vi at vi omkring 0.37 sekunder inde i tonen havde 20 perioder på 0.028 sekunder. Faktisk kan vi selv aflæse det lidt mere præcist. Starttidspunktet er omkring 0.3687 og slut tidspunktet er 0.3970. Længden for de 20 perioder er altså 0.0283 sek. Derved bliver frekvensen

$$\omega = \frac{20}{0.0283} = 706.7\,\text{Hz} \quad \text{og} \quad \text{T=0.001415}$$

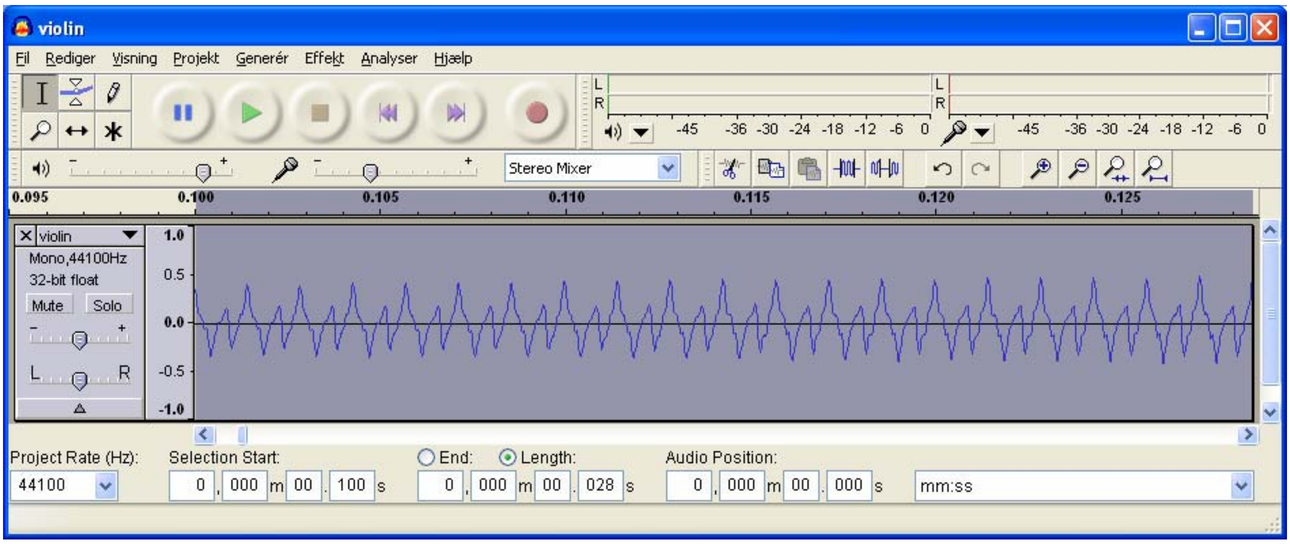
Dette svarer til en lidt høj udgave af tonen F (698Hz) . Hvad havde vi fået hvis vi havde valgt et andet sted på tonen?



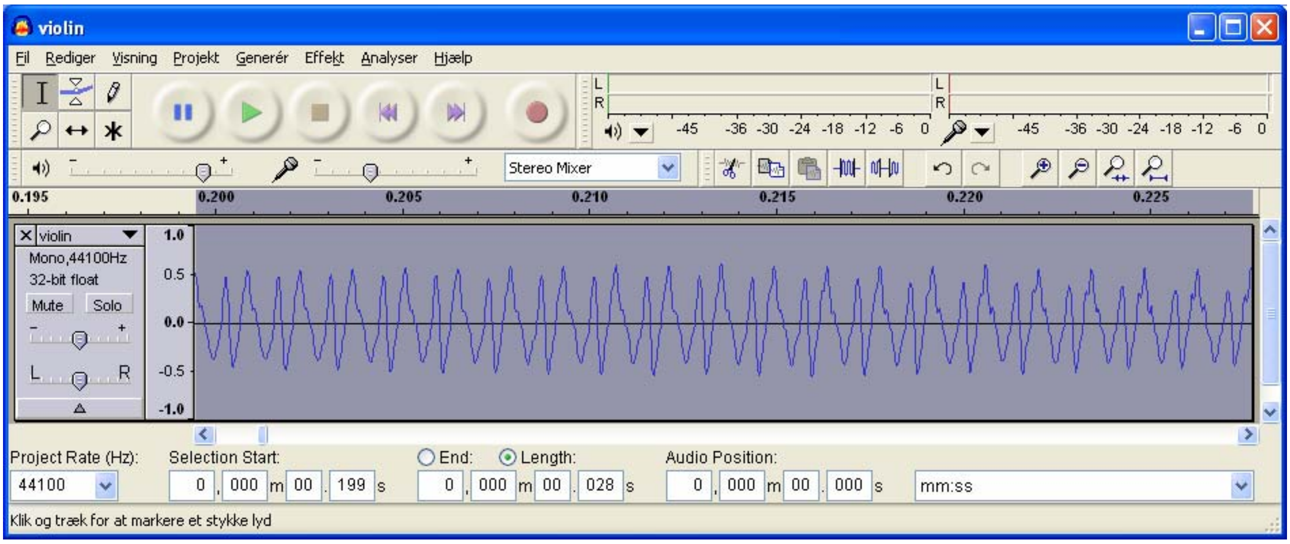
Her er tiden for de 20 perioder 0.7709-0.7420=0.0289 der svarer til



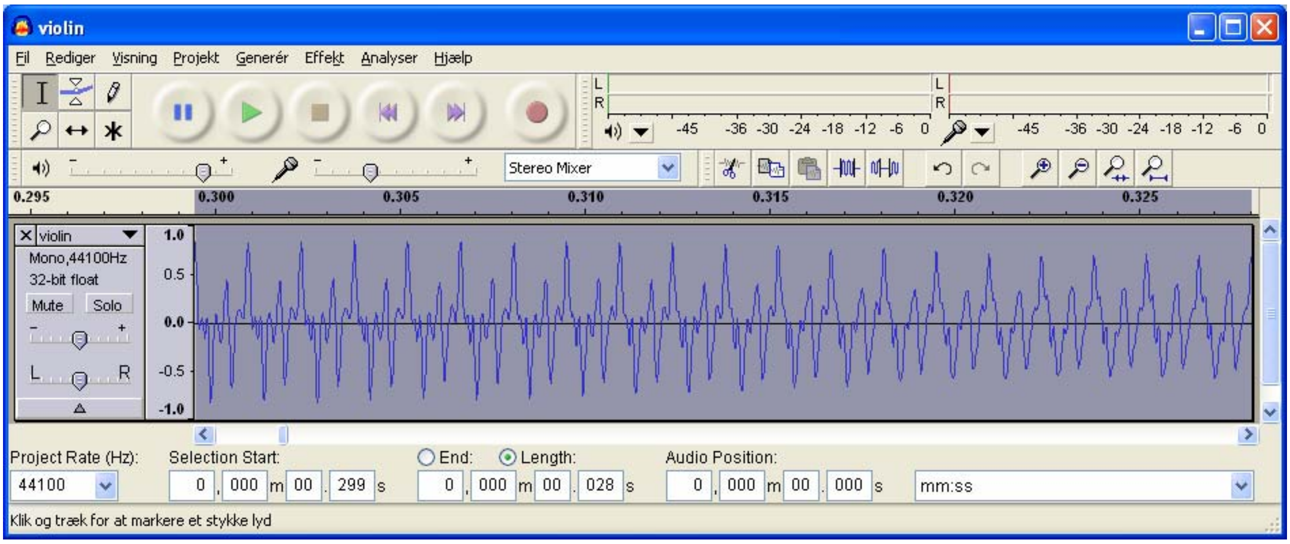
49.9 til 78.1 svarer til 0.0282 frekv=709.2



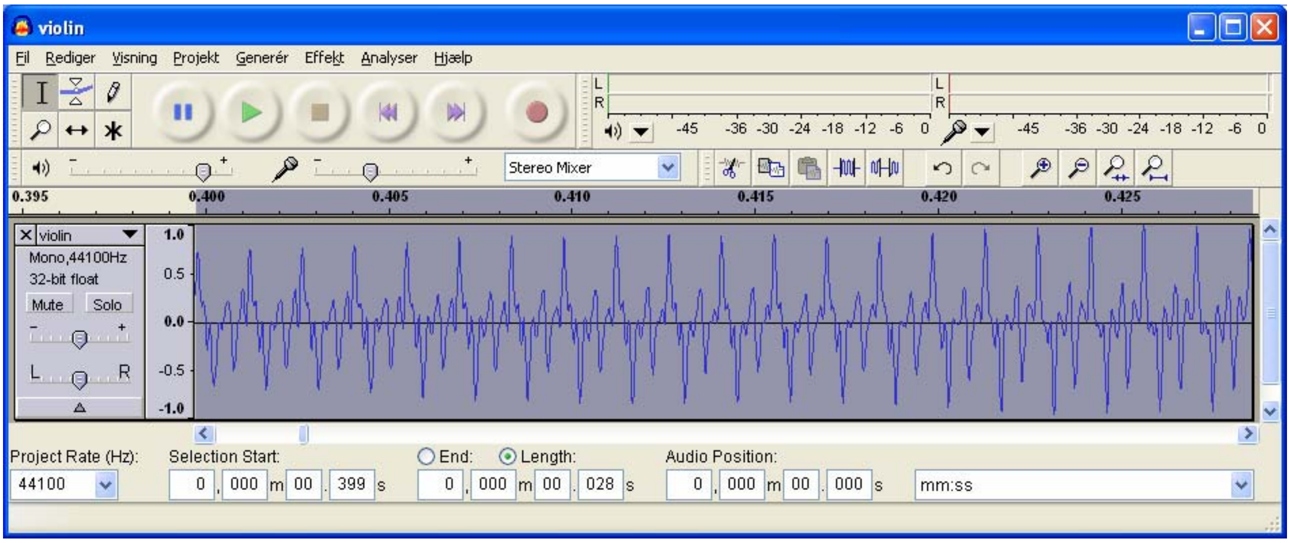
Tiden = 128.4-100.0 = 28.4, der svarer til en frekvens på



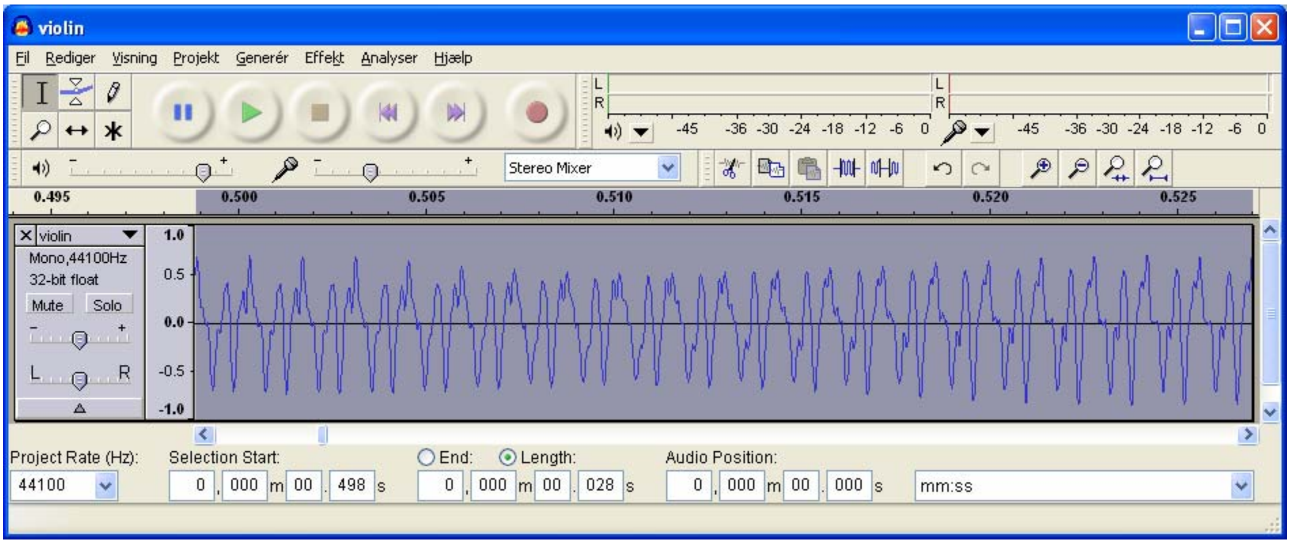
199.4 til 227.7



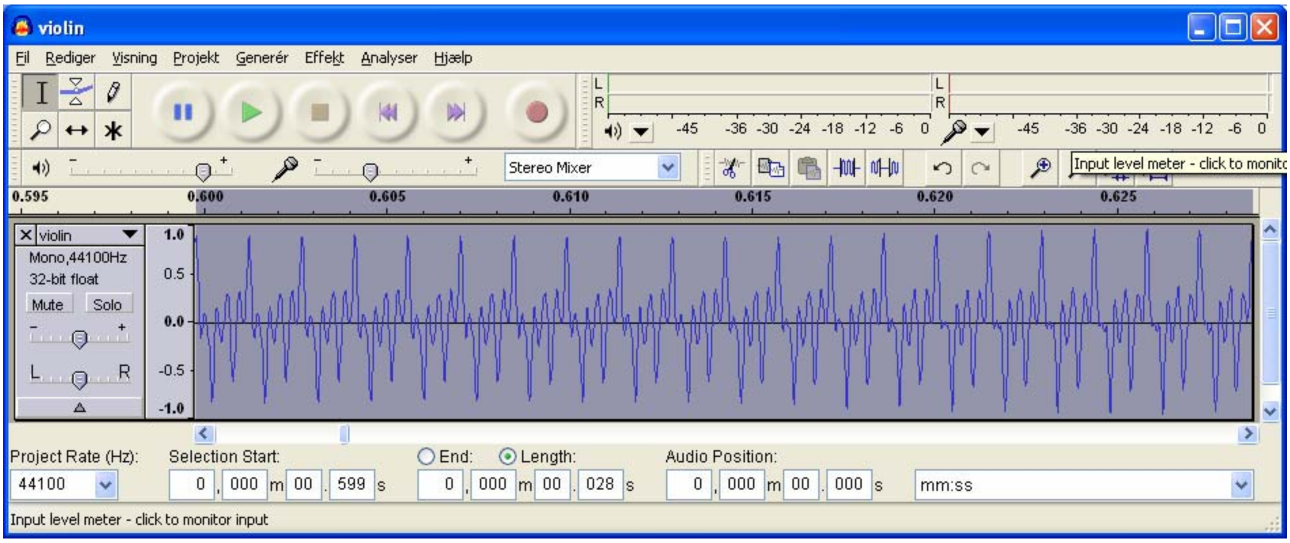
299.4 til 328



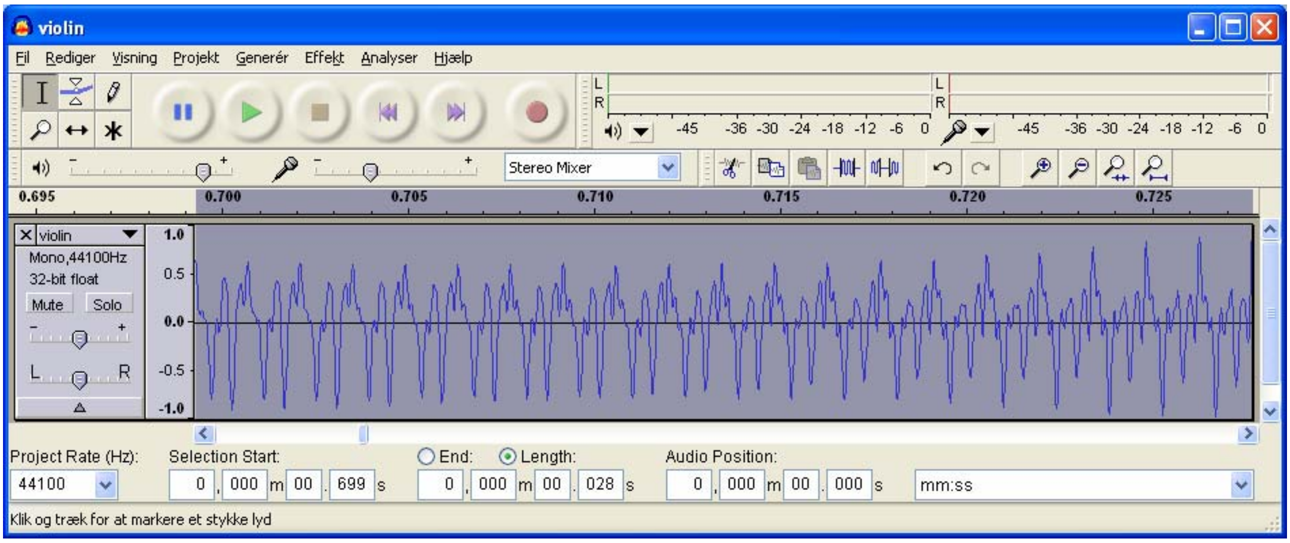
399.8   428.6



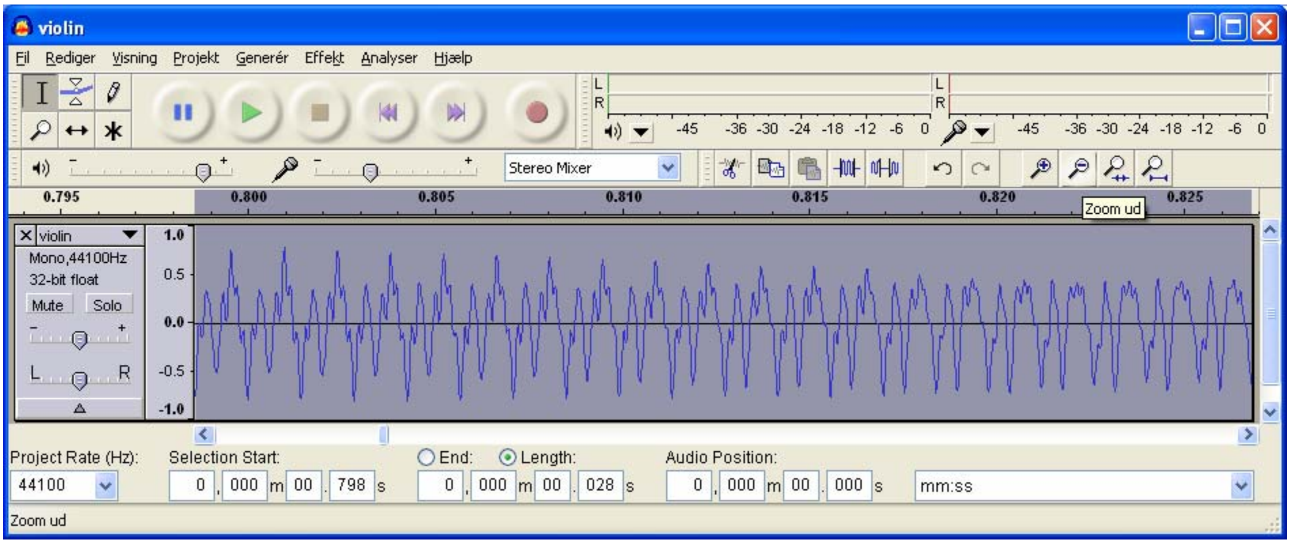
499 til 527



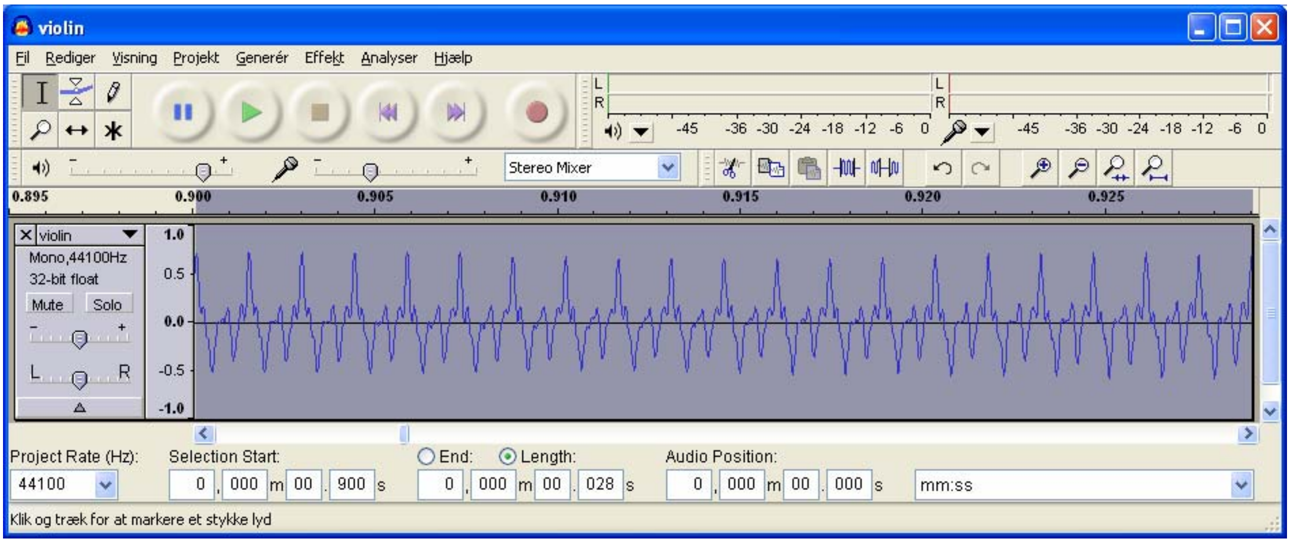
599.8 til 628.8



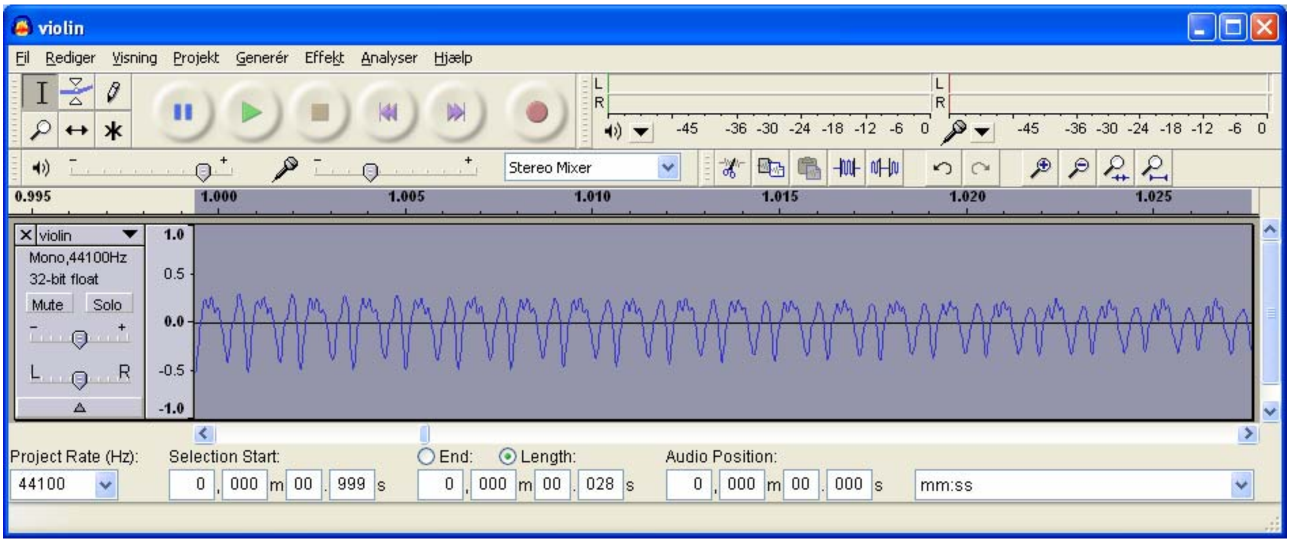
699.2 til 727.7



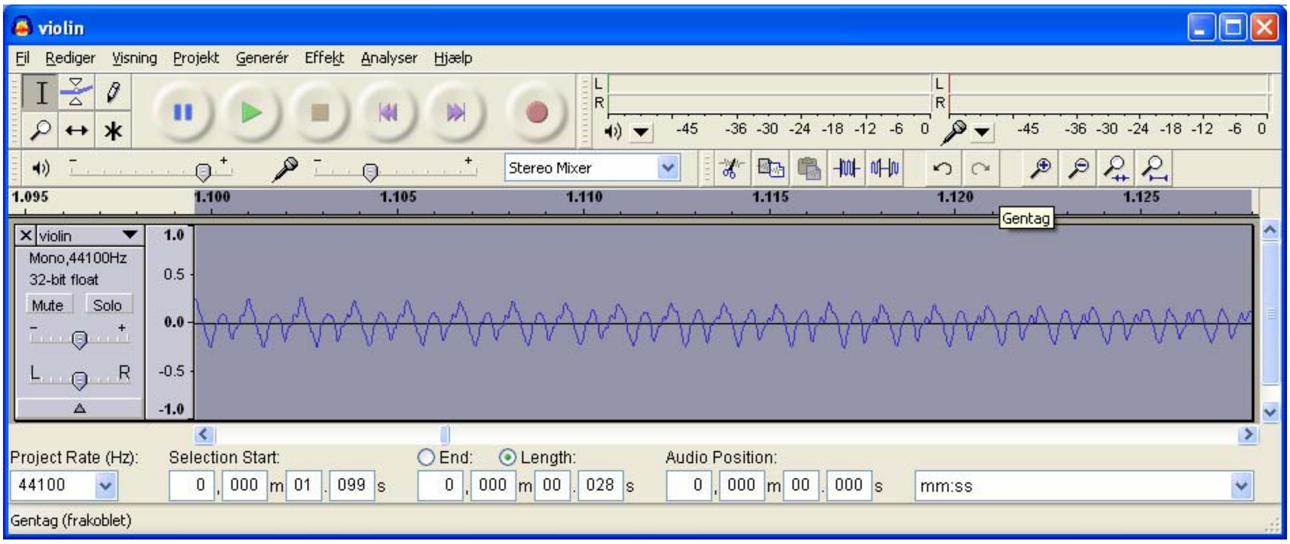
798.5 til 826.7



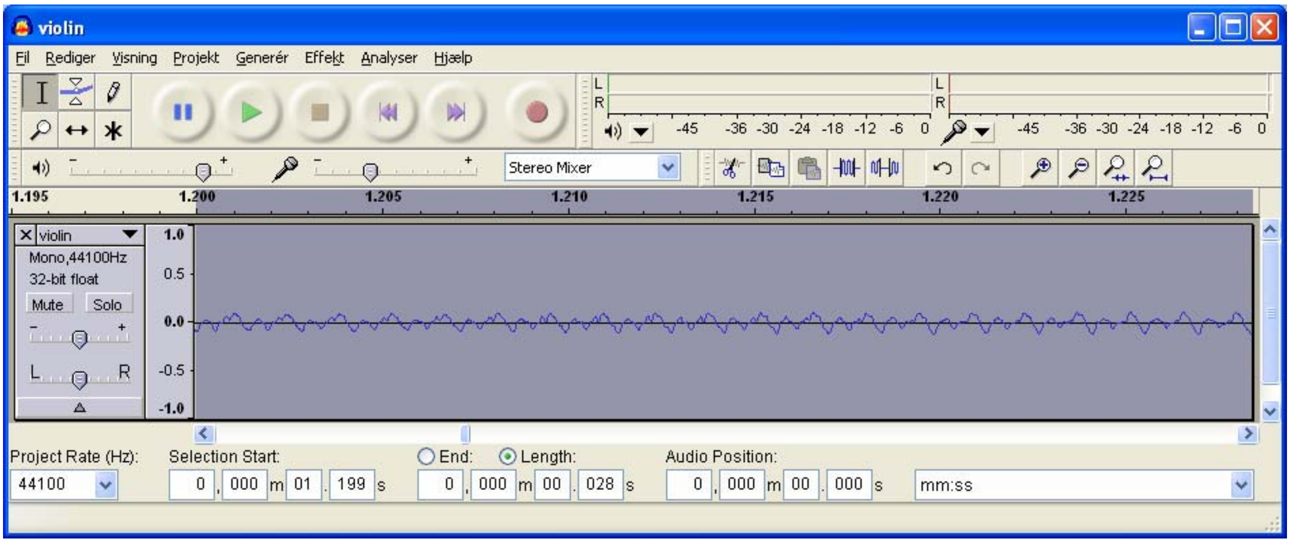
900.1 til 929



999.3 til 1027.7

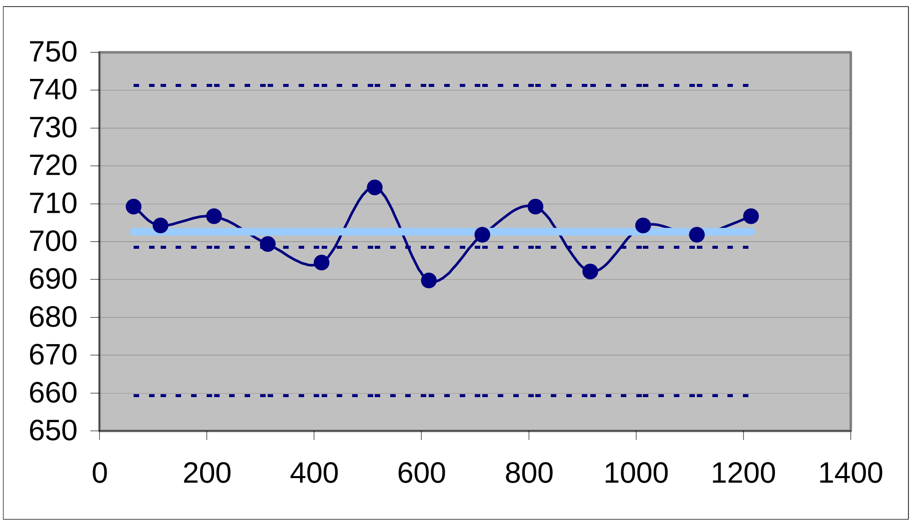


1099.5 til 1128



1200 til 1228.3

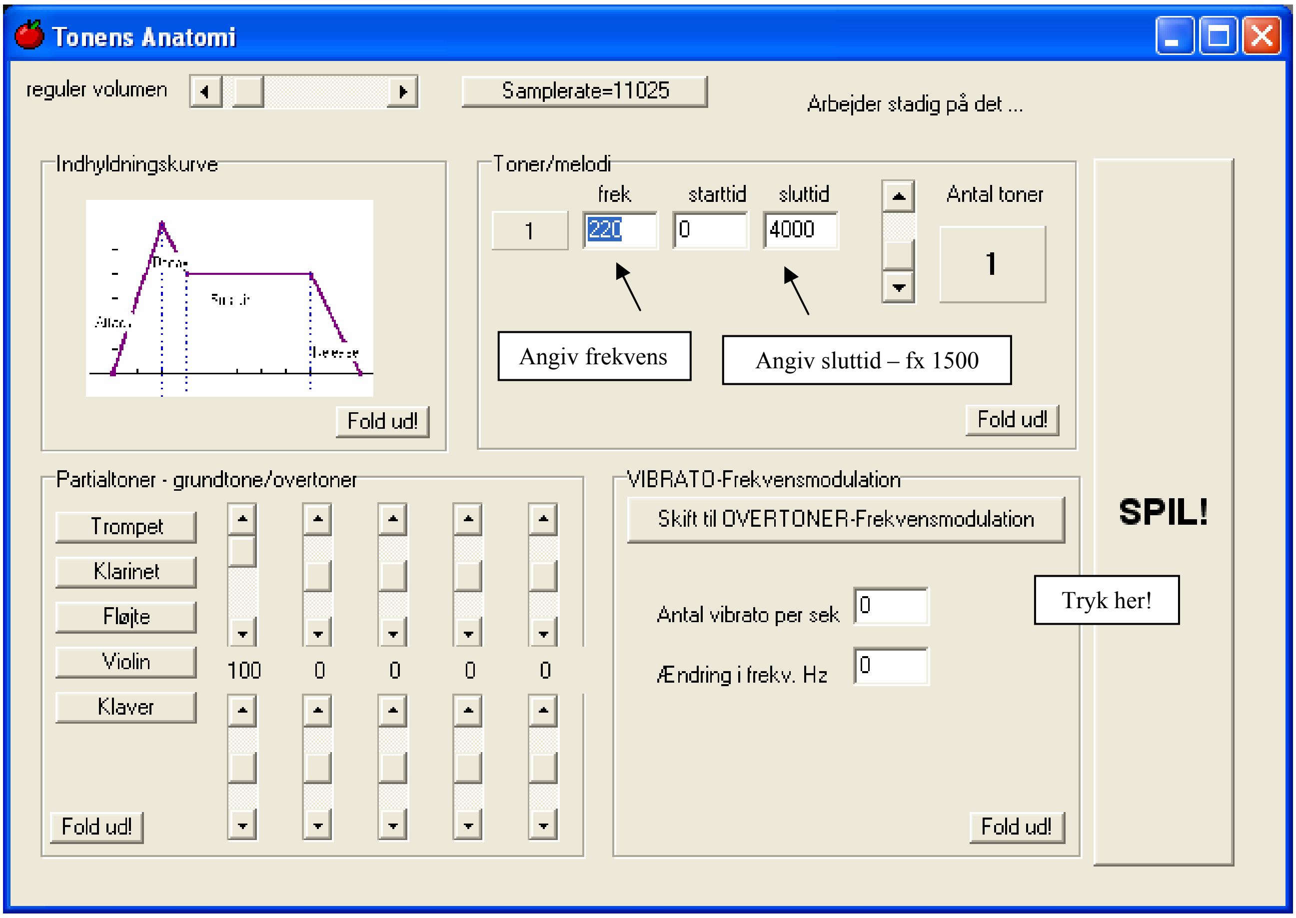
Gennemsnittet bliver en frekvens på 702.5Hz (den lyse kurve) med en frekvenskurve der svinger 3-4 gange op til 10 Hz i midten af tonen



De stiblede linier er linierne for tonerne *E*, *F* og *Fis*.

Hør den tone vi har fundet i 1.del

Åben tonegeneratoren *TonensAnatomi*. I Appendikset på side 33 ser du hvor du kan hente den.



Sæt frekvensen til 702.5 og skift evt sluttiden til 1500 (ms). Tryk på **SPIL**.

Du kan evt sammenligne med violintonen, som kan hentes på
http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/overtoner/violin.mp3

Resultatet er en tone der er samme *tonehøjde*, men den klinger helt forkert.

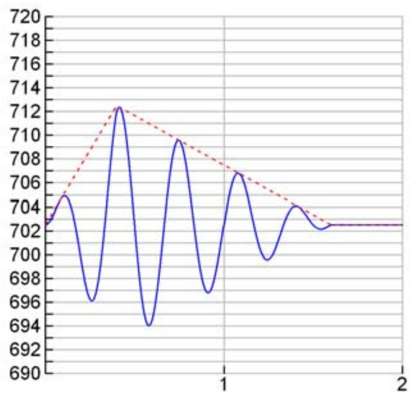
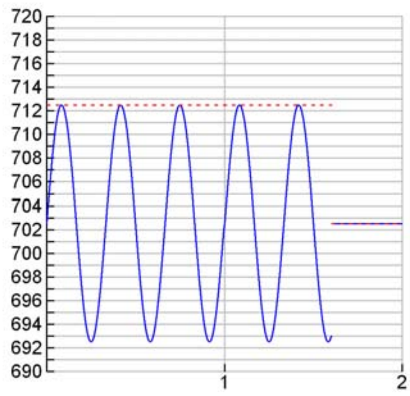
Der er også mulighed for at lade frekvensen svinge (vibrato), men det viser sig at være en meget kompliceret affære. Prøv at sætte **ændring i frekv.** Til 10Hz og **Antal vibrato pr sek** til 3.

I princippet erstatter vi frekvensen med en funktion der svinger. Nedenfor svinger vi 10 Hz og vi svinger 3 gange i sekundet (forklar hvorfor)

$$\omega(t) = 702.5 + 10 \cdot \sin(3 \cdot x \cdot 2\pi)$$

Men i stedet for at modulationen slår direkte igennem dæmpes den så den først slår igennem ¼ inde i tonen.

På næste side ser du en grafisk fremstilling

	
frekvensen ændres, men ændringen kommer langsomt og toner ud igen	frekvensen svinger fast hele perioden.

Den dæmpede udgave er standardindstillingen for tonegeneratoren. Hvis du klikker på **Fold ud** i feltet **Vibrato-frekvensmodulation** kan du vælge den anden model.

Det lyder ikke godt. Det viser sig hurtigt, at der sker meget mere end vi forestiller os når man laver frekvensmodulation. Det vil vi vende tilbage til senere.

En simpel matematisk beskrivelse af en tone

En simpel meget simpel matematisk model af en tone beskriver udsvinget (eller trykændring) g(x) som en sinusfunktion af tiden *x*:

$$g(x) = c \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot x + \phi)$$

hvor ω er frekvensen, ϕ (udtales *fi*)er faseforskydningen og *A* er amplituden. Når *x* løber fra 0 til 1 vil *g(x)* gennemløbe ω (udtales *omega*) perioder. Frekvensen angiver antal svingninger pr sekund., og dermed angiver det forholdet mellem antal svingninger og tiden for et hvilket som helst tidsrum.

Opg

Tegn funktionerne

$g_1(x) = 2 \cdot \sin(x)$

$g_2(x) = 3 \cdot \sin(x)$

$g_3(x) = 1 \cdot \sin(x)$

Hvilken betydning har koefficienten *c* i beskrivelsen af ligningen.

Tegn funktionerne

$g_4(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi / 2)$

$g_5(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi)$

$g_6(x) = 2 \cdot \sin(x - 0.1)$

Hvilken betydning har koefficienten ϕ i beskrivelsen af ligningen

Ved at benytte formlen

$$\sin(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \sin(\mathrm{A}) \cdot \cos(\mathrm{B}) + \cos(\mathrm{A}) \cdot \sin(\mathrm{B})$$

kan vi omskrive vores udtryk for *g(x)* til

$$c \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot x + \phi) = c \cdot (\sin(2\pi \cdot \omega \cdot x) \cdot \cos(\phi) + \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x) \cdot \sin(\phi)) =$$
$$c \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot x) + c \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x) = b \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot x) + a \cdot \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x)$$

Her er $a = c \cdot \cos(\phi)$ og $b = c \cdot \sin(\phi)$

Vi kan dermed skrive g(x) på formen

$$g(x) = a \cdot \cos(2\pi \cdot \omega \cdot x) + b \cdot \sin(2\pi \cdot \omega \cdot x)$$

Det viser sig at være en hensigtsmæssig beskrivelse af en svingning, fordi vi lettere kan bestemme koefficienterne *a* og *b*. Når vi har dem kan vi sagtens bestemme *c* ved

$$\mathrm{c} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$$

Hvis svingningstiden *T* angiver hvor lang tid en svingning tager, så har vi altså

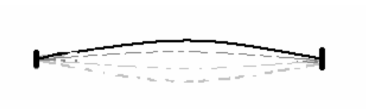
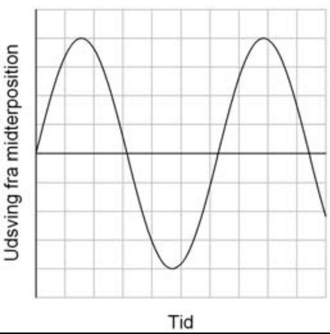
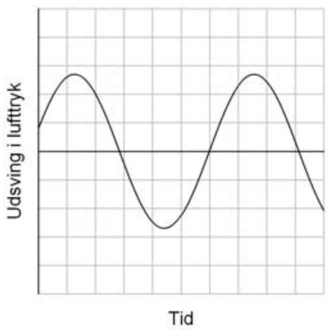
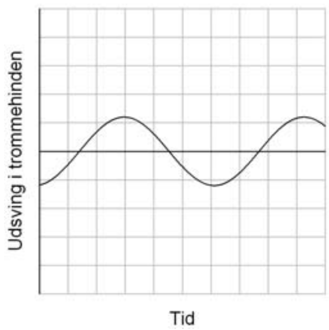
$$\omega = \frac{1}{\mathrm{T}}$$

Erstatter vi frekvensen med svingningstiden kan vi skrive g(x) på formen

$$g(x) = a \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot x) + b \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot x)$$

Hvad er det vi har grafen for her?

En tone kan beskrives som *svingning*, men fra en streng slås an til vi registrerer det i hjernen har denne svingning fået mange forskellige udtryk. Et par hovedstationer på vejen fra *den svingende streng* til *oplevelsen af lyd* er:

<table>
<tr><th>En streng slåes an.</th><th>Lydbølgens udbredelse gennem luften</th><th>Lyden når øret</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Betragt midtpunktet på strengen. Bevægelsen over tid kan beskrives ved:
En svingende streng
</td><td>Hvordan ændres trykket I et punkt ud for øret? Ændringen over tid kan beskrives ved:
Lydudbredelse i luft
</td><td>Betragt midtpunktet på trommehinden. Bevægelsen over tid kan beskrives ved:
Trommehindens bevægelse
</td></tr>
</table>

Bemærk at de tre grafer ligner hinanden, men at selvom det er den samme ”lyd”, der beskrives på tre forskellige måder, og selvom disse beskrivelser har tydelige lighedspunkter, så er det tre forskellige ting, der beskrives ovenfor. I det følgende vil vi beskrive lyd ved svingninger, uden at gå meget op i hvilke af de tre kurver det er, og det er en rimelig model; men ikke helt rigtig. Fx formes klangen ikke kun af instrumentet, men også af det rum vi spiller i. Temperatur og luftfugtighed, vil muligvis også påvirke klangen. Trommehindens tilstand vil muligvis påvirke forstærke særlige frekvenser og dæmpe andre, hvis du fx har sprunget trommehinden i forbindelse med en mellemørebetændelse som barn. Men selvom vi kunne lave en hel række af overstående kurver, der repræsenterede hver sin fase i lydens vej fra streng til oplevelse, så er forskellen på kurverne meget mindre end lighederne. Vi vil derfor bare beskrive lyd som en svingning, uden at gå i detaljer med præcis hvilken af ovenstående kurver det er.

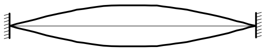
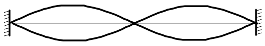
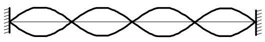
Udtrykket

$$g(x) = a \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot x) + b \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot x)$$

beskriver en ren sinustone. Det var den vi hørte i tonegeneratoren. Det er en alt for simpel beskrivelse. For at komme nærmere på instrumentets *klang,* bliver vi nødt til at indføre instrumentets *partialtoner* eller *overtoner* i denne beskrivelse.

En udvidet matematisk beskrivelse af en tone

Hver gang vi hører en tone fx fra en streng, der bliver slået an, så hører vi samtidig nogle overtoner. Ofte er grundtonen den kraftigste, og så bliver overtonerne svagere og svagere. Overtoneforholdet for et instrument er en vigtig del af instrumentets klang. Disse toner kaldes også partialtoner, og det er en bedre betegnelse, fordi den kraftigste tone ikke behøver være grundtonen (1. partialtone), men kan sagtens være den første overtone (2. partialtone).

Partialtone-Nummer		Frek.	Svingningstid
1.		f	T
2.		2·f	T/2
3.		3·f	T/3
4.		4·f	T/4
5.		5·f	T/5

Hvor kraftig de forskellige overtoner er i forhold til hinanden, er afgørende for instrumentets klang. Der er andre forhold, ser også spiller ind, men isoleret set er overtoneforholdene de vigtigste.

Første partialtone er den vi har beskrevet i den simple matematiske model. Den har frekvensen *f* og svingningstiden *T* , og den kan skrives på formen

$$a_1 \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot x) + b_1 \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot x)$$

Tilsvarende vil den 2. partialtone have formen (husk: at dividere med T/2 er det samme som at gange med den omvendte brøk 2/T)

$$a_2 \cdot \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) + b_2 \cdot \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x)$$

Vi fortsætter og får den n'te partialtone til

$$a_n \cdot \cos(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x)$$

Dermed kan vi altså beskrive placeringen af et punkt på strengen, eller ændringen i trykket ved

$$\mathrm{g(x)} = \frac{1}{2}\mathrm{a}_0 + \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{a}_\mathrm{n} \cdot \cos(\mathrm{n} \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{x}) + \mathrm{b}_\mathrm{n} \cdot \sin(\mathrm{n} \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{x})$$

Her er tilføjet et første led der er konstant. Hvorfor det lige har den form vender vi tilbage til om lidt. Hvis g(x) angiver lufttryk, så er konstantleddet altså, det gennemsnitlige lufttryk. Hvis g(x) angiver afvigelse fra en midterposition for et punkt på en streng, så er konstantleddet lig med 0.

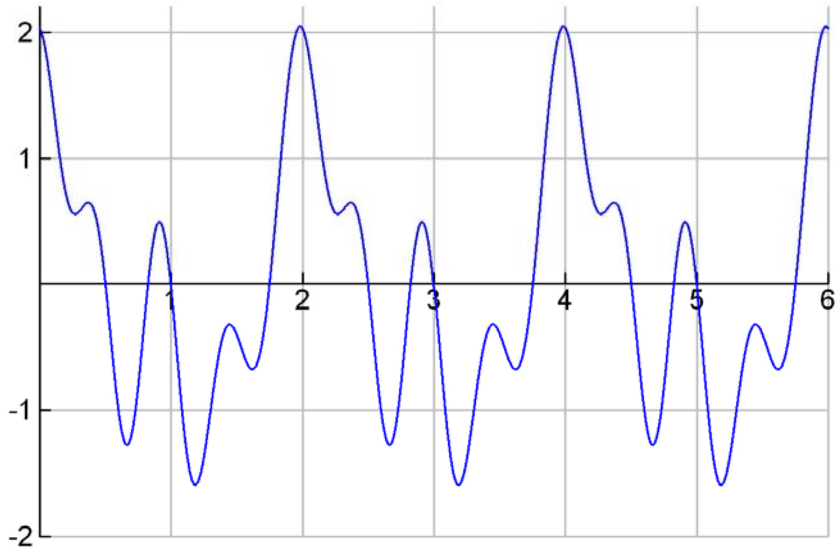
Den størrelse der angiver den n'te partialtones styrke er

$$\mathrm{c}_\mathrm{n} = \sqrt{(\mathrm{a}_\mathrm{n})^2 + (\mathrm{b}_\mathrm{n})^2}$$

Eksempel:
Den klang der har T=2 og hvor vi har følgende bidrag til partialtonerne

$$a_1 = 1 \;\; a_2 = 0.6 \;\; a_4 = 0.4 \;\; a_5 = 0.03 \quad b_1 = 0.3 \;\; b_3 = 0.2 \;\; b_4 = -0.5 \;\; b_5 = 0.1$$

(de øvrige er 0) har grafen



Bemærk her er svingningstiden er 2 dvs. en periode pr to enheder. Frekvensen er ½.

Opg:
Tegn $g(x)$ hvis vi ved at $a_1 = 1 \;\; b_1 = 0.3$, $a_2 = 0.6$, $b_3 = 0.2$ og at de øvrige koefficienter er 0.

I praksis er situationen omvendt. Udgangspunktet er, at vi har en kurve, der viser svingningsmønsteret, og ud fra den ønsker vi at beregne alle a- og b-koefficienterne.

Når vi skal beregne a og b-koefficienterne gælder følgende formel:

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot i\cdot x\right)dx \quad \text{for } 0 \le i$$
$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot i\cdot x\right)dx \quad \text{for } 0<i$$

At dette gælder viser vi i appendiks 2

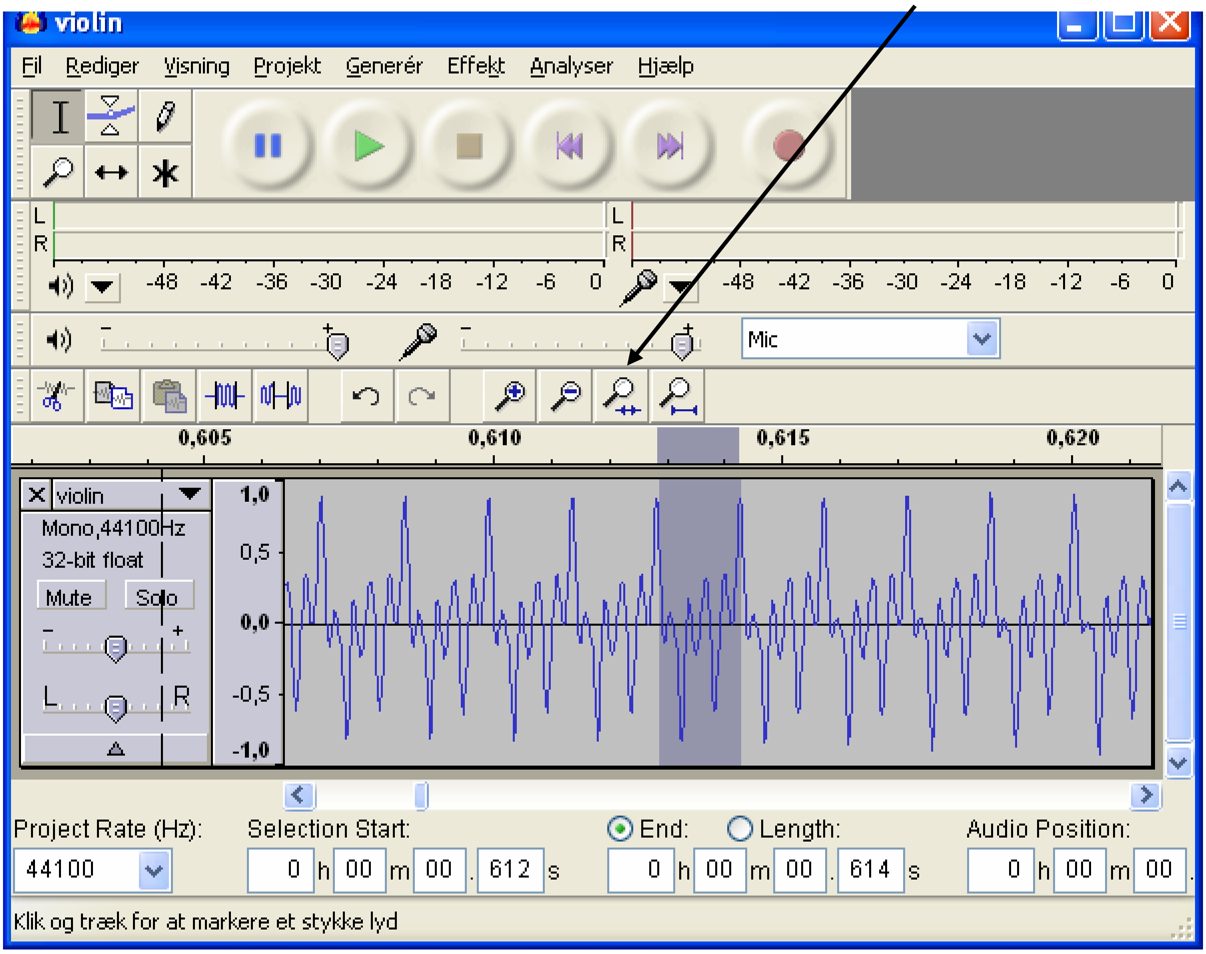
Men hvordan skal vi overhovedet finde forskriften for svingningen $g(x)$? Til det er svaret, at den skal vi heldigvis ikke finde. Vi skal beskrive den ved dens opførsel i en række punkter, og det er også ud fra disse punkter vi vil bestemme tilnærmede værdier af integralerne ovenfor.

I øvrigt er vi kun interesseret i *størrelsesforholdet* mellem disse koefficienter, så vi kan fx godt se bort fra faktoren 2/T, hvis vi gør det i alle integralerne.

Et konkret eksempel på fourier-analyse

Vi har allerede set, hvordan vi benytter tidsenheden på x-aksen til at bestemme svingningstiden T og dermed frekvensen *f*.
Når vi skal bestemme af partialtonerne indbyrdes størrelsesforhold, kan vi selv vælge en passende enhed på x-aksen. Vi er nemlig kun er interesseret i den konkrete lyds sammensætning, og dermed kun *forholdet* mellem a'erne og b'erne. Jeg vil nu først beskrive en metode, og så senere forklare hvorfor det i al væsentlighed er integralerne der beskriver a- og b-koeficienterne vi har beregnet.

Først zoom'er vi så meget ind at vi kan se svingningerne tydeligt. Afmærk derefter præcis en svingning og klik på den knap der zoom'er ind så det afmærkede område fylder hele skærmen

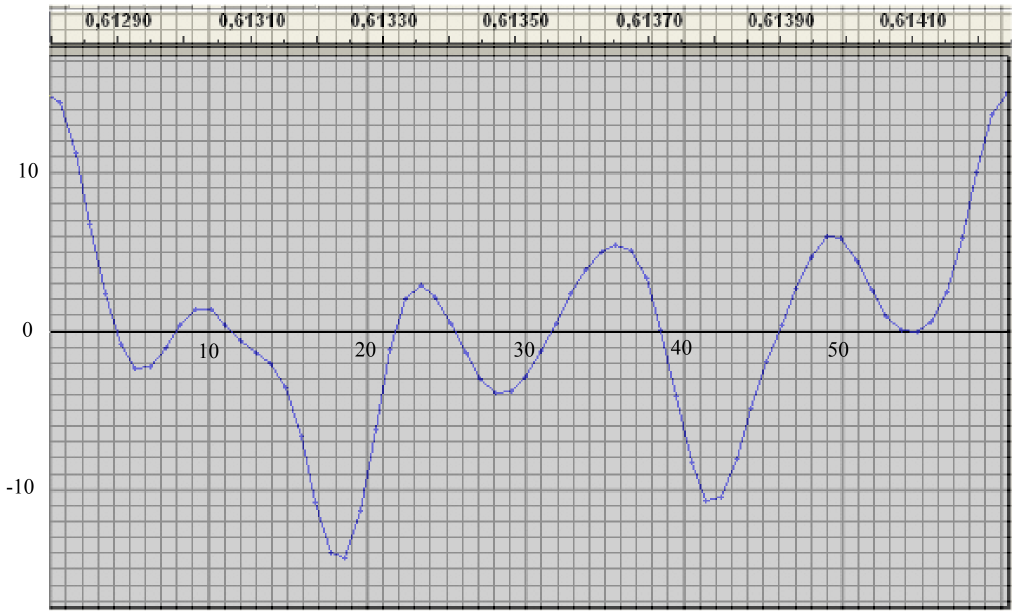


Man kan evt gøre Audacity bredere og højere inden man gør det, så man får mere nuancerede data. Jeg har gjort det højere, men ikke bredere.

Resultatet ses nedenfor. Her har jeg samtidig lagt et net hen over. Det kan du gøre på mange forskellige måder. Den teknisk simpleste er at lave en Overhead af et stykke milimeterpapir og en udskrift af grafen. Hvis du derefter klæber OHP'en fast på grafen (så akserne passer) får du resultatet.

Jeg har selv et billede af et millimeterpapir og et billede af grafen som jeg i et billedprogram har lagt ovenpå hinanden, hvorefter jeg har gjort det øverste lag halvgennemsigtigt. Under alle omstændigheder er dette billede vigtigt, fordi det er det vi bygger alle udregninger på. Hvis du laver det vha en udskrift skal du scanne det bagefter, så du har en dokumentation for dine udregninger.

På billedet ser vi svingningsmønsteret for en periode. Enheden på x-aksen er helt tilfældig. Bemærk de små prikker på grafen. Det er de støtte punkter som programmet har tegnet kurven efter. Det er tæt på den enhed vi bruger her, men det er tilfældigt og uden betydning i denne sammenhæng.



Opgaven bliver nu at aflæse værdierne. Vi får

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
14,8	13,5	9	4	0	-2	-2,1	-1,4	0	1	1,3	0,3	-0,6	-1,2	-2	-4	-7	-12	-14	-13

20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
-9	-4	0,5	2,5	2,5	1	-1	-3	-3,8	-3,7	-3	-1,3	1	2,7	4	5	5,2	4,5	2	-2

40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
-7	-10	-11	-9	-5,5	-2,5	0	2,8	5	6	6	4,4	2,2	0,8	0	0	1,4	4	8	12	14,2

Hvis den sidste værdi er den samme som den første tælles den ikke med. Så er vi nemlig allerede "begyndt forfra".

Det er vigtigt at aflæse resultaterne så nøjagtigt som muligt, men samtidig er det klart at 1. decimal ovenfor er et gæt. Den kan sagtens afvige en lille smule.

Vi skal bestemme a_1 givet ved

$$\frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cdot\cos(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot x)dx$$

Funktionen *g*(*x*) er den vi har bestemt forskriften for ovenfor. Regner vi i vores ”nye enhed” som passer til ternene, så er *T*=61. Det er fordi det første datapunkt var for *x*=0. Funktionen *g*(*x*) er periodisk med perioden 61.

Tallet foran integralet er ligegyldigt. Det er en fast konstant det skal ganges på alle koefficienterne, og hvis vi bare sørger for at fjerne dem fra dem alle sammen gør det ikke nogen forskel, fordi vi kun er interesseret i *størrelsesforholdet* mellem a og b-koefficienterne.

Funktionen

$$\cos(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot x)$$

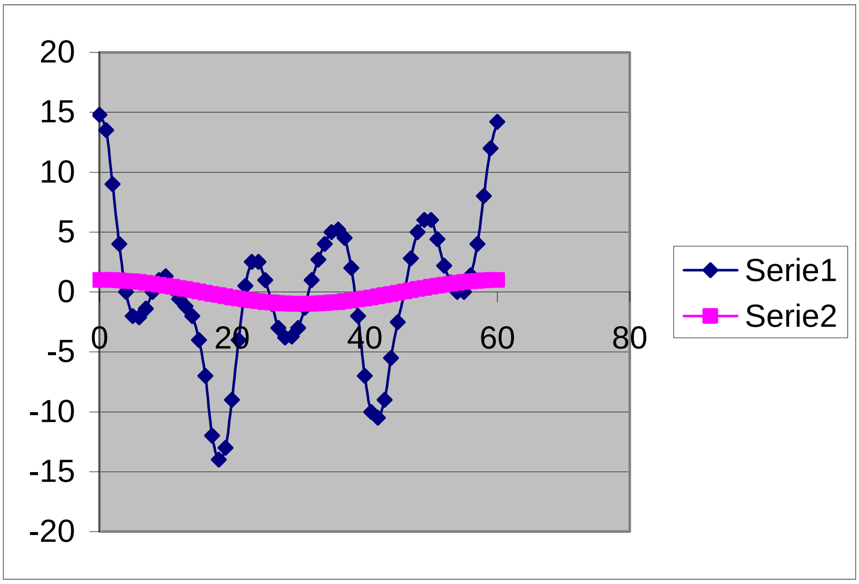
er en cosinusfunktion, der har samme periode *T*, som *g*(*x*).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1					**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**...**
2				g(x)	**14,8**	**13,5**	**9**	**4**	**0**	**-2**	**-2,1**	**-1,4**	**0**	**1**	**...**
3				1											
4				1											
5				2											
6				2											
7				3											
8				3											
9															
10															

Prøv i første omgang at skrive følgende formel i E3: +cos(2*PI()*E1/61).

I EXCELL opfattes PI som en funktion med en konstant værdi. Derfor skriver vi PI(). Kopier derefter formelen i E3 hele vejen hen ved at ”trække i krydset”.

Afmærker vi nu hele blokken E1:BM1 og tegner et diagram af typen XY-punkt får vi:



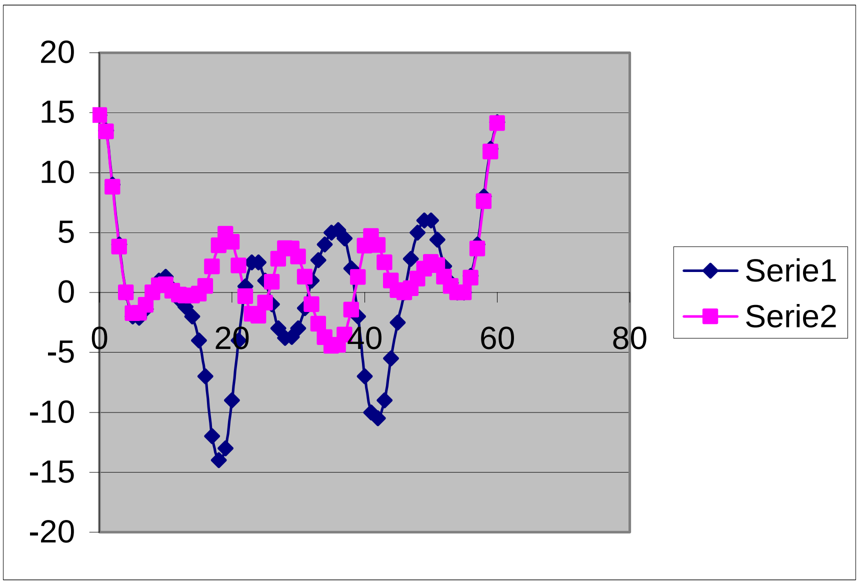
Bemærk at den blå ser ud som den kurve vi så i Audacity. Bemærk også at cosinusfunktionen gennemløber netop en periode. Når cosinusfunktionen er så flad skyldes det at $g(x)$ bevæger sig mellem -15 og 15 mens $\cos(x)$ bevæger sig mellem -1 og 1.

Nu har vi set at cosinusfunktionen i EXCEL åbenbart regner i radianer så lad os nu rette formlen i E1 til

+cos(2*PI()*E1/61)*E2

Kopier formlen hele vejen hen ved at ”trække i krydset”.

Nu vil din graf skifte til følgende



Den blå graf er g(x), altså den vi gerne vil genskabe. Den røde er den som det første cosinus-led kan forklare.

Vi skal ikke bruge grafen til andet end til at bestemme integralet, og det vil sige arealet hørende til kurven. Det skal forståes sådan, at vi regner arealet over aksen for positivt og arealet under aksen for negativt. Et godt bud på integralet

$$\int_0^T g(x) \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot x)dx$$

er derfor summen af alle de værdier vi har regnet ud

$$\sum_{k=0}^{60} g(k) \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi}{61} \cdot k)$$

I EXCEL-arket regnes det nemmest ud ved at markere hele rækken E2:BN2 (et felt længere end data er) og så trykke på tasten *autosum*: Σ

Med de data vi har ovenfor skal det gerne give a1=110,19.

På samme måde skrives følgende formel i E5: +sin(2*PI()*E1/61)*E2 : Når den er kopieret hen og vi har taget summen skal det gerne give -61.18

I E6 skriver vi formlen +cos(2*2*PI()*E1/61)*E2 . Bemærk her er der kommet en koeficient 2 på som der skulle iflg formlen

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(x) \cdot \cos(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot i \cdot x)dx$$

I E7 skriver vi tilsvarende formlen +sin(2*2*PI()*E1/61)*E2

Du kan gå ind og hente en EXCEL-skabelon, der udregner disse ting for dig. Lad os kort se på hvordan den ser ud.

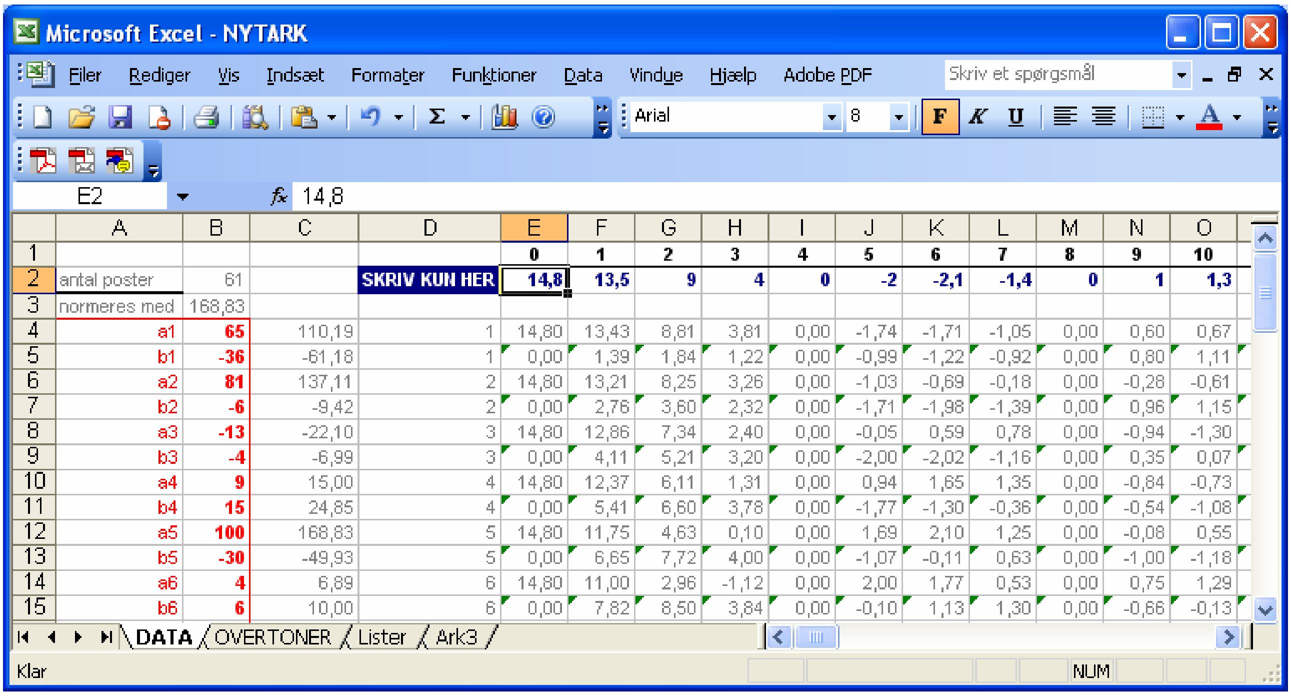
I denne EXCEL-skabelon bliver der regnet meget ud for dig, men derfor er det også vigtigt, at du kun skriver de steder du må skrive. Hvis du skriver noget, et sted hvor der er en formel, så slette du formlen, og så virker regnearket ikke så godt næste gang du skal bruge det. Du kan selvfølgelig bare hente en ny skabelon og starte forfra. Men lad os se på skabelonen.

Her skriver du kun data ind i E2 ….. Derefter regner programmet selv resten ud.

Den tæller antal celler der står noget i, og angiver antallet i B2. Det skal du altså IKKE selv rette.

Koefficienterne til a1, b1,a2, b2 osv står fra c4 og nedaf.

I B3 står det største tal der optræder og det divideres op i a- og b-koefficienterne, så den største værdi bliver 100. Det er nemlig max/min for tonegeneratoren.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	antal poster	61		SKRIV KUN HER	14,8	13,5	9	4	0	-2	-2,1	-1,4	0	1	1,3
3	normeres med	168,83													
4	a1	65	110,19	1	14,80	13,43	8,81	3,81	0,00	-1,74	-1,71	-1,05	0,00	0,60	0,67
5	b1	-36	-61,18	1	0,00	1,39	1,84	1,22	0,00	-0,99	-1,22	-0,92	0,00	0,80	1,11
6	a2	81	137,11	2	14,80	13,21	8,25	3,26	0,00	-1,03	-0,69	-0,18	0,00	-0,28	-0,61
7	b2	-6	-9,42	2	0,00	2,76	3,60	2,32	0,00	-1,71	-1,98	-1,39	0,00	0,96	1,15
8	a3	-13	-22,10	3	14,80	12,86	7,34	2,40	0,00	-0,05	0,59	0,78	0,00	-0,94	-1,30
9	b3	-4	-6,99	3	0,00	4,11	5,21	3,20	0,00	-2,00	-2,02	-1,16	0,00	0,35	0,07
10	a4	9	15,00	4	14,80	12,37	6,11	1,31	0,00	0,94	1,65	1,35	0,00	-0,84	-0,73
11	b4	15	24,85	4	0,00	5,41	6,60	3,78	0,00	-1,77	-1,30	-0,36	0,00	-0,54	-1,08
12	a5	100	168,83	5	14,80	11,75	4,63	0,10	0,00	1,69	2,10	1,25	0,00	-0,08	0,55
13	b5	-30	-49,93	5	0,00	6,65	7,72	4,00	0,00	-1,07	-0,11	0,63	0,00	-1,00	-1,18
14	a6	4	6,89	6	14,80	11,00	2,96	-1,12	0,00	2,00	1,77	0,53	0,00	0,75	1,29
15	b6	6	10,00	6	0,00	7,82	8,50	3,84	0,00	-0,10	1,13	1,30	0,00	-0,66	-0,13

Det som vi altså her har fået at vide er at vores funktion $g(x)$ kan beskrives ved

$$g(x) = 65 \cdot \cos(\frac{2\pi}{T} \cdot x) - 36 \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot x) + 81 \cdot \cos(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) - 6 \cdot \sin(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) - 13 \cdot \cos(3 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot x) \ldots$$

Opsamling og diskussion

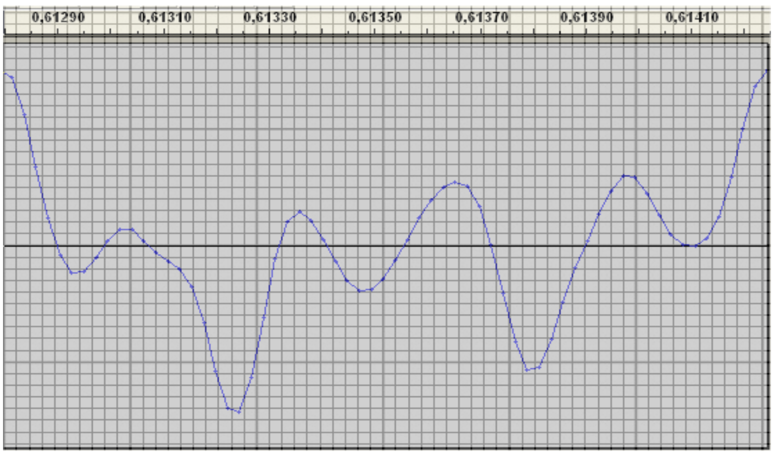
Der er i hvert fald to måder at vurdere resultatet.

En oplagt måde er at indstille tonegeneratoren på de overtoneforhold vi har beregnet og så lytte til den.

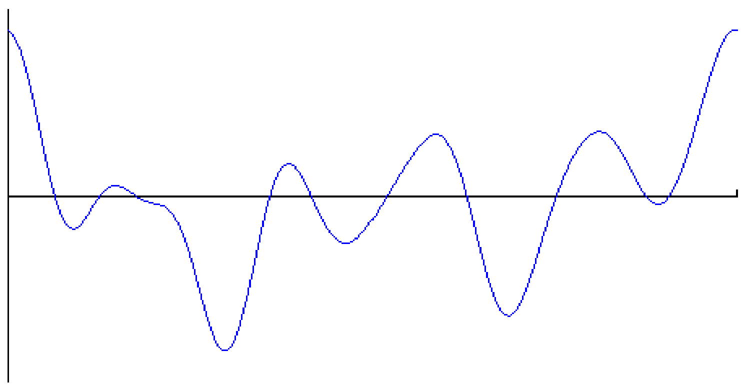
Indspil tonegeneratorens resultat med Audacity og indspil den oprindelige tone ved siden af. Diskuter om den er god. Hvad mangler der? Er det partialtoneforholdene der ikke passer eller er der andre forhold der gør sig gældende? Der kan være rigtig mange forskellige elementer, der spiller ind. Prøv at vurdere om klangen er rigtig (for det er det vi har arbejdet med her) på den ene side, og hvilke andre forhold vi ikke har taget hensyn til på den anden. Hvor er vores model af ”en tone” for simpel.

En anden måde at kontrollere resultatet på, er ved at sammenligne det svingningsmønster vi forsøgte at gengive, men det vi har med de aktuelle a- og b-værdier. Tegn grafen for den beregnede funktion ved siden af det skærmbillede, vi forsøgte at ramme. Passer de? Hvad fortæller det os? Hvordan hænger det sammen med det vi lyttede til?

Det originale svingningsmønster



Det beregnede svingningsmønster:



Kan man tale om overtoneforhold for et instrument? Ja, i et vist omfang. Hvis du kan finde beskrivelser af hvilke overtoneforhold der er karakteristisk for en violin så sammenlign dem med dine egne. Hvordan passer det med det vi har set her? På hvilke måder er det lidt for forenklet at tale om overtoneforhold for et bestemt instrument fx en violin?

Appendiks 1 - Trigonometriske formler:

Additionsformlerne

(1.1) $$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sin(\mathrm{A})\cdot\cos(\mathrm{B}) + \cos(\mathrm{A})\cdot\sin(\mathrm{B})$$

(1.2) $$\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \cos(\mathrm{A})\cdot\cos(\mathrm{B}) - \sin(\mathrm{A})\cdot\sin(\mathrm{B})$$

(1.3) $$\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \sin(\mathrm{A})\cdot\cos(\mathrm{B}) - \cos(\mathrm{A})\cdot\sin(\mathrm{B})$$

(1.4) $$\cos(\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \cos(\mathrm{A})\cdot\cos(\mathrm{B}) + \sin(\mathrm{A})\cdot\sin(\mathrm{B})$$

Af (1.1) og (1.2) følger

(1.5) $$\mathrm{c}\cdot\sin(\omega\cdot t+\phi) = \mathrm{a}\cdot\cos(\omega\cdot t) + \mathrm{b}\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

hvor $\mathrm{a} = \mathrm{c}\cdot\sin(\phi)$ og $\mathrm{b} = \mathrm{c}\cdot\cos(\phi)$. Ud fra disse formler følger også

(1.6) $$c = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{og} \quad \tan(\phi) = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$

Lægger vi (1.2) og (1.4) sammen får vi

(1.7) $$\cos(\mathrm{A})\cdot\cos(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\cdot(\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}) + \cos(\mathrm{A}-\mathrm{B}))$$

Trækker vi (1.4) fra (1.2) får vi

(1.8) $$\sin(A)\cdot\sin(B) = \frac{1}{2}\cdot(Cos(A-B) - Cos(A+B))$$

Appendiks 2 Fourieranalyse i lidt flere detaljer

Lad os for overskuelighedens skyld antage at T= 2π . Dermed har vi

$$g(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

Når vi skal beregne a og b-koefficienterne gælder følgende formel:

$$a_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cdot\cos(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot i\cdot x)dx \quad \text{for } 0 \le i$$

$$b_i = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cdot\sin(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot i\cdot x)dx \quad \text{for } 0<i$$

Vi nøjes med at vise formlen for a_1 og a_0 i specialtilfældet T= 2π . I dette tilfælde siger formlerne altså

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\cos(i\cdot x)dx \quad \text{for } 0 \le i$$

$$b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\sin(i\cdot x)dx \quad \text{for } 0<i$$

Bevis for a_1:

For i=1 har vi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\cdot x) + b_n\cdot\sin(n\cdot x)\right)\cdot\cos(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a_0\cdot\cos(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_n\cdot\cos(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} b_n\cdot\sin(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx\right)$$

I: Det første integral give 0 fordi vi integrerer cos(x) over en hel periode.

II: Når vi skal reducere integralerne i første sumtegn, skal vi bruge formel 1.7 fra apendiks 1

$$\cos(A)\cdot\cos(B) = \frac{1}{2}\cdot(\cos(A+B) + \cos(A-B))$$

Vi får

$$\int_0^{2\pi} a_n\cdot\cos(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx = a_n\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(n\cdot x + x) + \cos(n\cdot x - x)dx =$$

$$(*) \quad \frac{a_n}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos((n+1)\cdot x)dx + \frac{a_n}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos((n-1)\cdot x)dx$$

Det er let at se (eller udregne) at hvis m er et positivt helt tal så vil

$$\int_0^{2\pi}\cos(m\cdot x)dx = 0$$

Det eneste led der ikke giver 0 ovenfor i (*) er leddet hvor n=1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} a_n \cdot \cos(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx = a_1 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(x)\cdot\cos(x)dx =$$

$$\frac{a_1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2x)+\cos(0)dx = \frac{a_1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2x)dx + \frac{a_1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(0)dx =$$

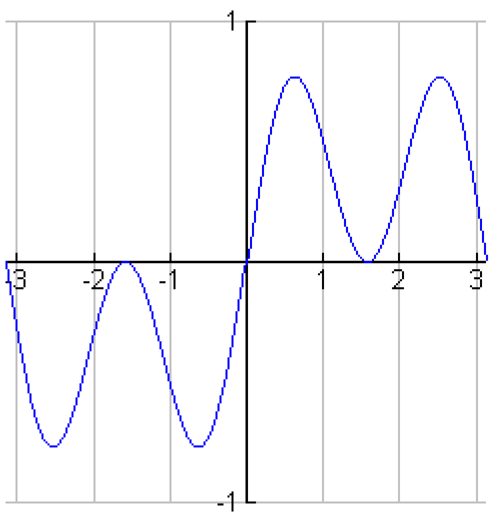
$$\frac{a_1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(0)dx = \frac{a_1}{2}\cdot 2\pi = a_1\cdot\pi$$

III: Vi mangler integralerne i sidste sumtegn. De er heldigvis lidt simplere.

$$\int_0^{2\pi} b_n \cdot \sin(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx = b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi}\sin(n\cdot x)\cdot\cos(x)dx$$

Da funktionen $\sin(n\cdot x)\cdot\cos(x)$ er periodisk med perioden 2pi, så er det lige meget om vi integrerer fra 0 til 2pi eller fra –pi til pi.

Funktionen $h(x)=\sin(n\cdot x)\cdot\cos(x)$ vil være ulige. Vi har nemlig
$h(-x)=\sin(n\cdot(-x))\cdot\cos(-x) = -\sin(n\cdot x)\cdot\cos(x) = -h(x)$



For n=2 ser h(x) således ud. Bemærk at funktionen er ulige dvs den kan spejles i punktet (0,0).

Når vi integrerer fra –pi til pi får vi 0.

Dermed har vi set, at alle integralerne i sidste sumtegn giver 0.

Nu kan vi så samle det hele fra før:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot\cos(n\cdot x) + b_n\cdot\sin(n\cdot x)\right)\cdot\cos(x)dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{a}_0\cdot\cos(\mathrm{x})\mathrm{dx}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{a}_\mathrm{n}\cdot\cos(\mathrm{n}\cdot\mathrm{x})\cdot\cos(\mathrm{x})\mathrm{dx}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{b}_\mathrm{n}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\mathrm{x})\cdot\cos(\mathrm{x})\mathrm{dx}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(0+a_1\cdot\pi+0\right)=a_1$$

Dermed har vi vist formlen

$$\mathrm{a}_\mathrm{i}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{g}(\mathrm{x})\cdot\cos(\mathrm{i}\cdot\mathrm{x})\mathrm{dx}\quad\text{for }0\le\mathrm{i}$$

For i=1!

Bevis for a_0:

Formlen for a_0 er enklere at vise. Her er i=0:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{g}(\mathrm{x})\cdot\cos(0\cdot\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{dx}=$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\mathrm{a}_0+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\mathrm{a}_\mathrm{n}\cdot\cos(\mathrm{n}\cdot\mathrm{x})+\mathrm{b}_\mathrm{n}\cdot\sin(\mathrm{n}\cdot\mathrm{x})\right)\mathrm{dx}$$

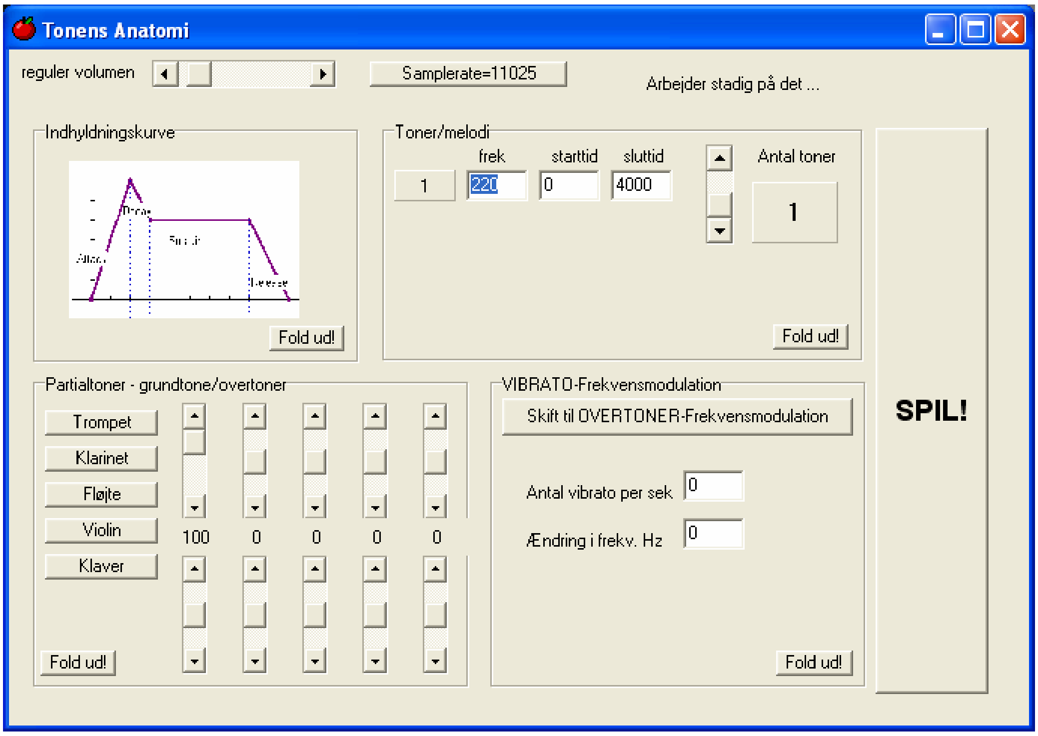
Men da cos(nx) og sin(nx) har integralet 0 bliver der kun første led tilbage:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{g}(\mathrm{x})\cdot\cos(0\cdot\mathrm{x})\mathrm{dx}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{a}_0\mathrm{dx}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathrm{a}_0\cdot2\pi=\mathrm{a}_0$$

Beviset for de øvrige a-koefficienter forløber som beviset for a_1

I beviset for b-koificienterne benytter vi formel (1.8) fra appendiks 1 i stedet, men ellers er det samme ide.

Appendiks 3 tonegneratorer.



Hentes på

En kort vejledning hentes på

Appendiks 4 frekvensoversigt

C	C#/Db	D	D#/Eb	E	F	F#/Gb	G	G#/Ab	A	A#/Bb	H	C
32,7	34,6	36,7	38,9	41,2	43,7	46,2	49,0	51,9	55,0	58,3	61,7	65,4
65,4	69,3	73,4	77,8	82,4	87,3	92,5	98,0	103,8	110,0	116,5	123,5	130,8
130,8	138,6	146,8	155,6	164,8	174,6	185,0	196,0	207,7	220,0	233,1	246,9	**261,6**
261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370,0	392,0	415,3	440,0	466,2	493,9	523,3
523,3	554,4	587,3	622,3	659,3	698,5	740,0	784,0	830,6	880,0	932,3	987,8	1046,5
1046,5	1108,7	1174,7	1244,5	1318,5	1396,9	1480,0	1568,0	1661,2	1760,0	1864,7	1975,5	2093,0
2093,0	2217,5	2349,3	2489,0	2637,0	2793,8	2960,0	3136,0	3322,4	3520,0	3729,3	3951,1	4186,0