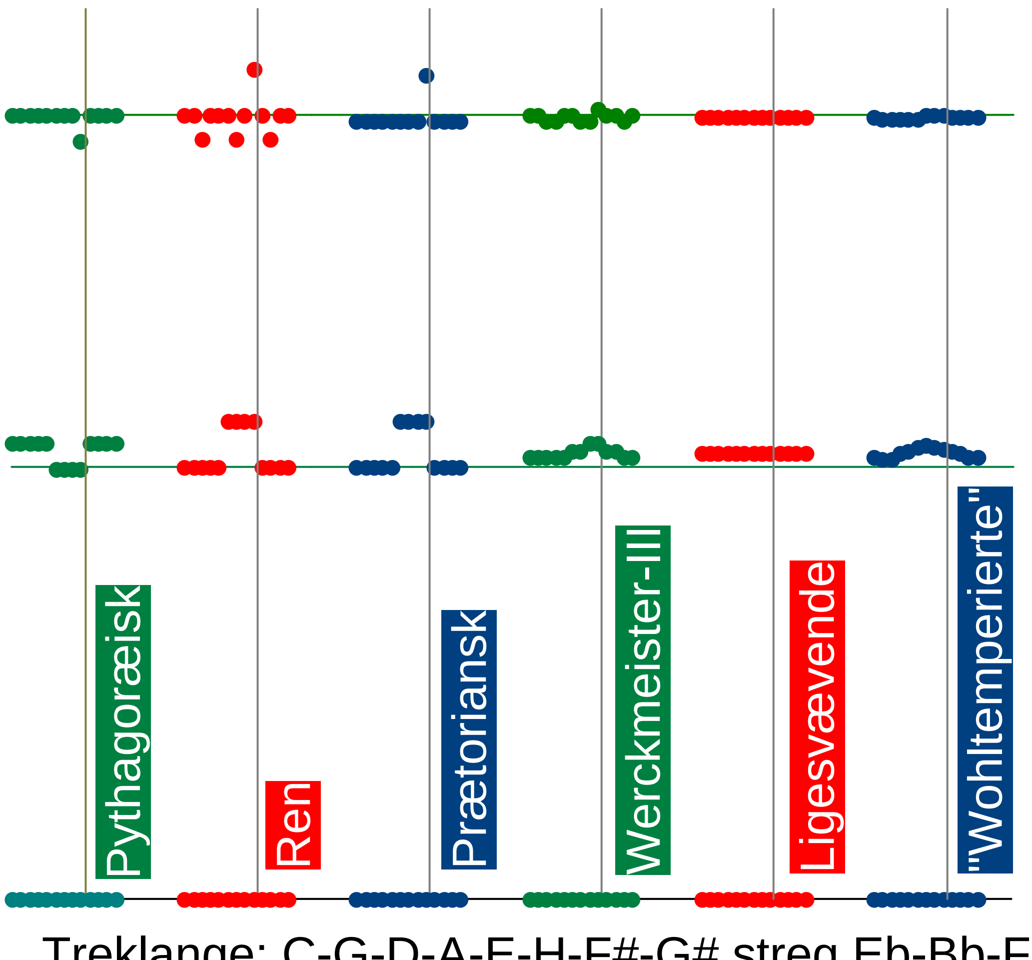
Stemninger
-resultater

En oversigt over (næsten) samtlige stemninger stillet op grafisk mod den *treklang*.



Treklange: C-G-D-A-E-H-F#-G# streg Eb-Bb-F-C

En oversigt over samtlige stemningers cent-værdier stillet op i tabelform mod den *ligesvævende stemning*.

Cent-værdien: $1200 \cdot \log_2(\mathit{frekvensforhold})$

	c	cis	d	es	e	f	fis	g	gis	a	bb	h	c
pyt	0.0	113.7	203.9	294.1	407.8	498.0	611.7	702.0	815.6	905.9	996.1	1109.8	1200.0
ren	0.0	70.7	203.9	315.6	386.3	498.0	590.2	702.0	772.6	884.4	1017.6	1088.3	1200.0
prae	0.0	76.0	193.2	310.3	386.3	503.4	579.5	696.6	772.6	889.7	1006.8	1082.9	1200.0
lige	0.0	100.0	200.0	300.0	400.0	500.0	600.0	700.0	800.0	900.0	1000.0	1100.0	1200.0
wohl	0.0	95.4	198.5	299.1	395.5	499.8	593.3	699.6	797.2	896.3	999.1	1093.8	1200.0
wer1	0.0	90.2	192.2	294.1	390.2	498.0	588.3	696.1	792.2	888.3	996.1	1092.2	1200.0
wer3	0.0	96.1	203.9	300.0	396.1	503.9	600.0	702.0	792.2	900.0	1002.0	1098.0	1200.0

Praktiske pædagogiske overvejelser

Det er vigtigt hele tiden at holde en musikalsk synsvinkel tydelig.

Det er musikken der leverer *problemet*. Matematikkens opgave er at *beregne og anskueliggøre*. Især den sidste del stiller udvidede krav til elevernes "grafiske kompetencer".

For de tidlige tonesystemer er vi så heldige at vi kan *høre* at de er dårlige. Det er meget vigtigt at få med her. Matematikkens opgave bliver så at prøve at opstille nogle redskaber der kan vise hvorfor det lyder dårligt.

Når vi nærmer os de tempererede ("Wohltemperierte", ligesvævende, Werckmeister-I og Werckmeister-III) kan vi godt opgive at høre forskellene på den meget enkle tonegenerator. Her er det så nødvendigt at vi har fået et lidt mere abstrakt forhold til hvad en "god stemning" er. Her har jeg reduceret det til at den er anvendelig i mange tonearter og at den har klange der nærmer sig de rene.

Heldigvis er det to krav der ikke kan opfyldes samtidig, og derfor bliver der ikke noget klart svar på konkurrencen om "hvem der er bedst?"

Frekvenser, frekvensforhold eller cent-værdier
Jeg har i fremstillingen taget udgangspunkt i den model, der genererer de enkelte tonesystemer og derefter lagt op til at eleverne skal starte med at regne i frekvenser.

Det tror jeg rent abstraktionsmæssigt er væsentlig nemmere at overskue.

Efterfølgende kan de så regne frekvensforholdene ud eksakt. I de eksakte frekvensforhold kommer forskellen på den tidlige tankegang med *rene intervaller* og den senere tankegang med *udjævning* eller *eksponentiel regression* over et længere interval (en oktav) eller et kortere område (kvart-komma-formindskede kvinter!) meget tydeligere frem.

Jeg har valgt at tegne meget. Hvis det er for svært er brugen af *cent-værdier* også oplagt. Den ligesvævende stemning bliver en ret linie, når vi tager logaritmen af frekvensforholdene og afbilder dem passende. Centværdierne for den ligesvævende stemning bliver

0, 100, 200, 300, 400 ... 1200

Centværdierne udtrykker altså i tal afvigelsen fra den ligesvævende stemning.

Jeg har ved hver stemning anførst frekvenserne for både a = 440 Hz og c = 249 Hz. Den sidste er en typisk barokstemning, der nærmest er en halv tone lavere.

Det eneste sted man SKAL benytte C = 249 Hz er ved den stemning jeg kalder "Wohltemperierte". Men den beskrivelse af stødtoner, som genererer stemningen er det helt afgørende, at man stemmer i dette leje.

Ideen i hele forløbet

Ideen er at eleverne arbejder sig gennem en række opgaver mere eller mindre sammen, der introducerer dem for forskellige stemninger. Forskellige måder at regne eller lytte på stemninger.

Derefter vælger de tre stemninger ud, som de skal præasentere i detaljer, og sammenligne.

Jeg har foreslået at de alle skal tage den *ligesvævende* fordi det er den vi bruger i dag og fordi den set fra den *ene* synsvinkel er idealet. Desuden skal de vælge en af de stemninger der er beskrevet (mest) ud fra rene intervaller (den Praetorianske er måske nærmest ovre i den anden gruppe) og de stemninger vi kan *høre* fejlene i, og så skal de vælge en fra den gruppe der er tempererede, hvor spørgsmålet bare er hvad der tempereres og hvordan.

Mellem disse vil der være nogle klare fælles pointer og også forskelle. Alle stemningerne i første søjle har problemet at ”enderne i kvintcirklen aldrig mødes. Alle dem i søjle B lyder bedre end den vi bruger i dag hvis man ikke spiller med mange fortegn og den sidste er tænkt rent ud fra ideen om at der ikke skal være forskel.

Forslag til arbejdsopgave omkring stemning.

Hver gruppe skal aflevere en rapport der sammenligner 3 stemninger. De tre stemninger skal være en fra hver søjle. Alle sammenligner altså med den ligesvævende, som er den vi bruger i dag.

A	B	C
Pytagoræiske Den Rene Den Prætorianske	”Wohltemperierte” Werckmeister-I Werckmeister-III	Den ligesvævende

Forklar hvordan de tre stemninger er bygget op.

Giv eksempler på styrker og svagheder ved de tre stemninger.

Alle konklusioner skal så vidt muligt underbygges både med lydklip fra tonegeneratorerne og med grafer og tabeller.

Den Pytagoræiske stemning

Den Pytagoræiske stemning eller det Pytagoræiske tonestystem finder vi hos Euclid i 3. århundrede f. Kr. En legende knytter det til Pytagoras (5. årh. f.Kr), men der er ikke håndfast belæg for denne antagelse. Via den senantikke filosof, statsmand og musikteoretiker Boëtius (480-524) overføres det Pytagoræiske tonesystem til den Europæiske middelalder. Her bruges det indtil omkring 1500, hvor andre stemninger begynder at dukke op.

I den Pytagoræiske stemning tager man udgangspunkt i at alle kvinter skal være rene, altså at de svarer til et frekvensforhold på 3/2

Eb Bb F C G D A E H F# C# G#

Ren kvint

	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#	Eb	Bb	F	C
Pytha-goræisk	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	2

Eller

	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	H	C
Pythago-ræisk	1	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2

Vi kan kigge på størrelsen af intervallerne.

Det viser sig at der er to typer store sekunder og store tertser, men kun en type små sekunder og små tertser.

Opbygningen er symmetrisk, bare vi ikke passerer ”hullet”.

Ser vi på store sekunder så er de næsten ens:

9/8: c-d, g-a,d-e,a-h, e-fis osv

Dem der er anderledes er slet ikke sekunder:

Cis-es og gis-Bb er formindskede tertser

Kvarter og kvinter er rene. De der går hen over hullet er ikke kvarter og kvinter længere!

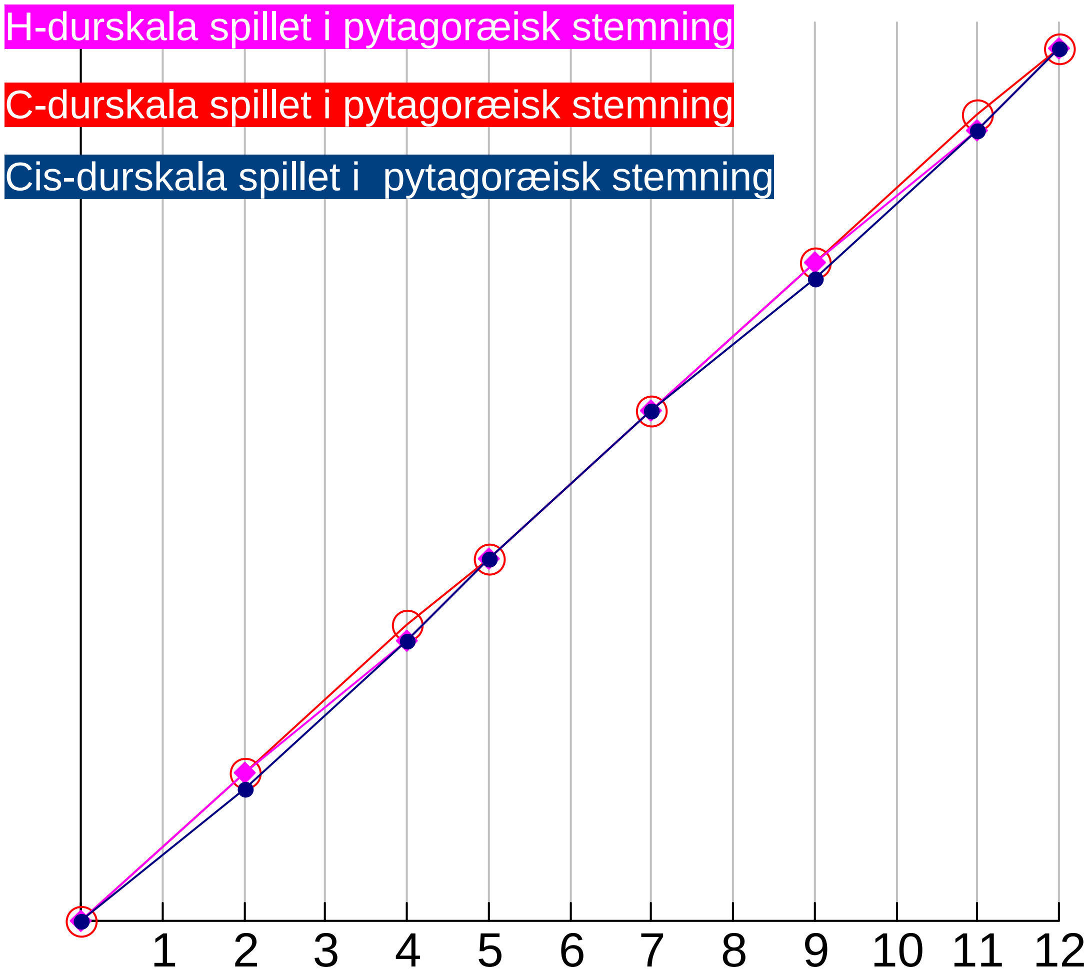
De rigtige kvinter er rene, men kvinterne hen over ”hullet” Es-Gis er ændrede

Frekvenserne for a= 440 Hz er

$\{260.7, 278.4, 293.3, 309.0, 330.0, 347.7, 371.3, 391.1, 417.7, 440.0, 463.5, 495.0, 521.5\}$

Frekvenserne for c = 249 Hz er

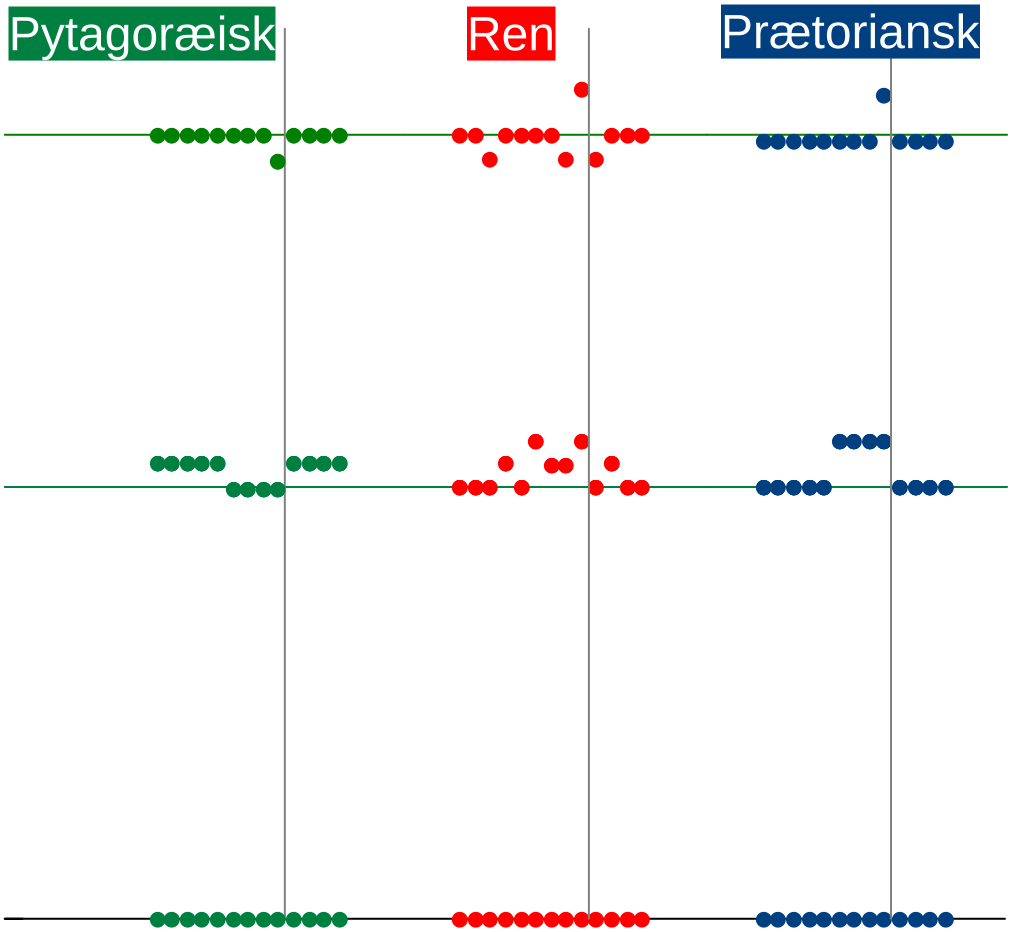
$\{249.0, 265.9, 280.2, 295.2, 315.2, 332.1, 354.6, 373.6, 398.9, 420.3, 442.7, 472.8, 498.1\}$



Den Pytagoræiske stemning ændrer sig meget når vi nærmer os "hullet" i kvint-cirklen.

Ovenfor er afbildet log(frekvensforholdet). Se hvordan Cis-dur er markant anderledes end C-dur.

Den Pytagoræiske stemning er altså ikke særlig god når vi vil spille i mange forskellige tonearter.



Treklange: C-G-D-A-E-H-F#-G# streg Eb-Bb-F-C

Ovenfor er markeret treklange i forskellige stemninger. Den første søjle repræsenterer en C-dur, den anden en G-dur osv. ”Hullet” er markeret med en streg.

I den Pytagoræiske stemning har vi flere problemer. Det ene er at tertsen generelt er alt for høj, så de almindelige klange lyder ikke godt.
Der er en kvint der er dårlig, og det er kvinten hen over ”hullet”, og generelt er vi nok mere følsomme overfor kvinter der er meget ved siden af. Det er den kvint der viser sig slet ikke at være en kvint, når man ser hvordan den er stemt. Men når ”musikken spiller” har man jo ikke andet valg.

Når der er flere tertser der har ændrede kvinter så skyldes det at allerede akkorden H har en terts ”på den anden side af hullet”. Men sjovt nok er det faktisk bedre!

Af det kan vi lære at klangene omkring H-Fis-Cis lyder rigtig godt men Gis lyder MEGET dårligt. Det gør det lidt vanskeligt at spille for meget.

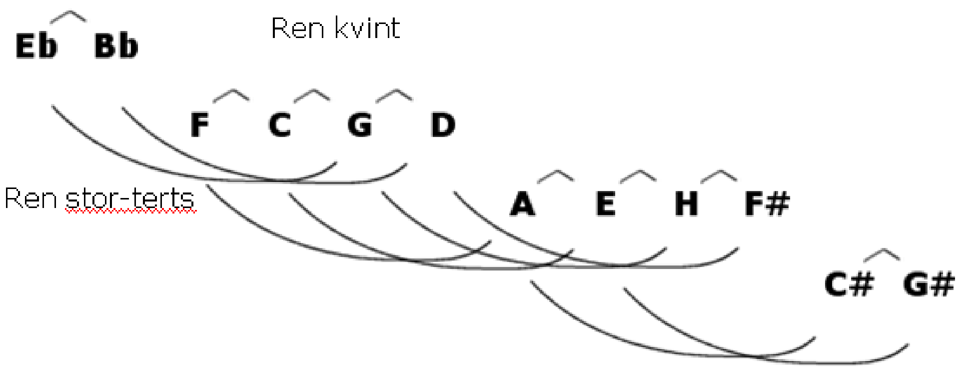
De almindelige tertser er for store: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 1.26563

Tertserne til H, Fis, Cis Gis er nærmest rene! (formindskede kvarter!) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot 2^5$ 1.24859

Den rene stemning

Omkring år 1500 møder vi de første stemninger der prøver at inddrage den rene storterts også. Det er i Ramos de Pareja's bog *Musica Practica*.

I den rene stemning stemmer man nogle af kvinterne rent men ikke alle. Systemet fremgår af følgende oversigt.



	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#	Eb	Bb	F	C
Ren	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	2

Eller

	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	H	C
Ren	1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2

Frekvenserne for a= 440 Hz er

$$\{264.0, 275.0, 297.0, 316.8, 330.0, 352.0, 371.3, 396.0, 412.5, 440.0, 475.2, 495.0, 528.0\}$$

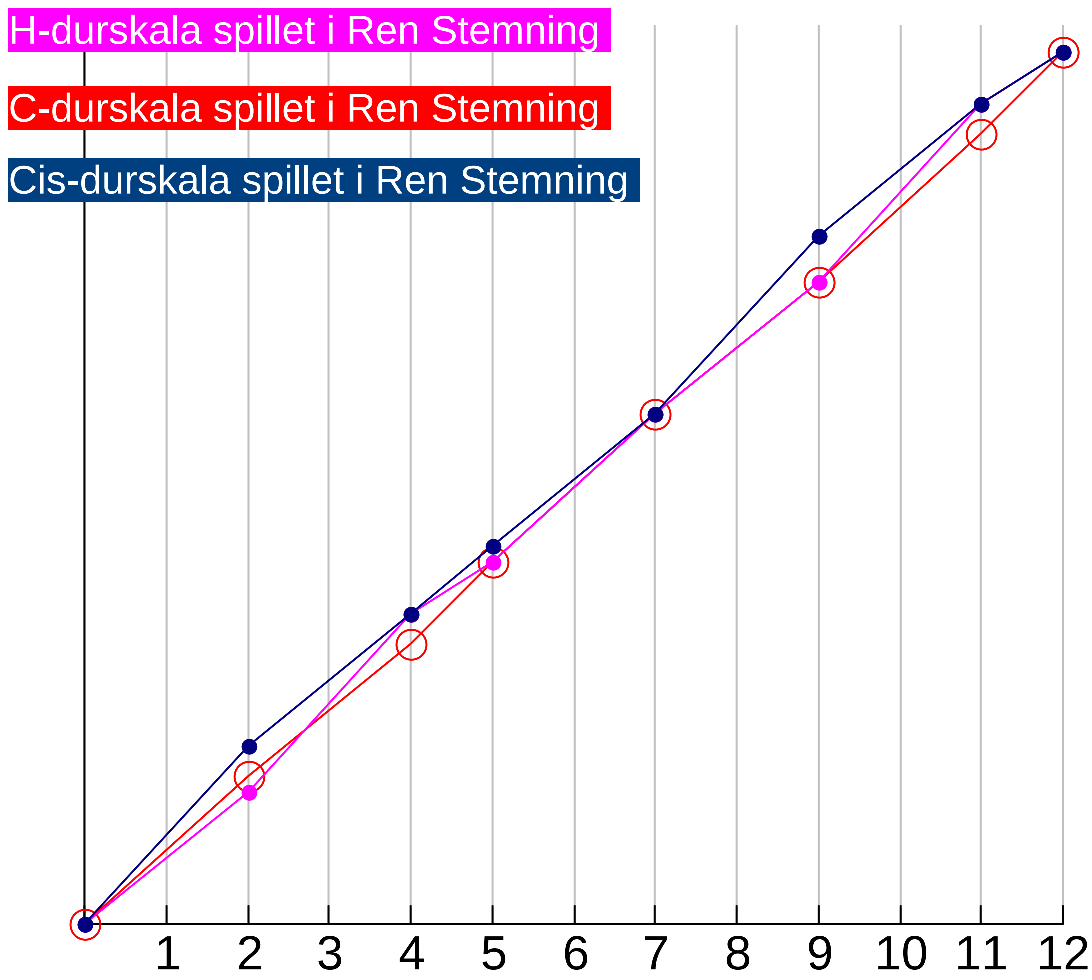
Frekvenserne for c = 249 Hz er

$$\{249.0, 259.4, 280.1, 298.8, 311.3, 332.0, 350.2, 373.5, 389.1, 415.0, 448.2, 466.9, 498.0\}$$

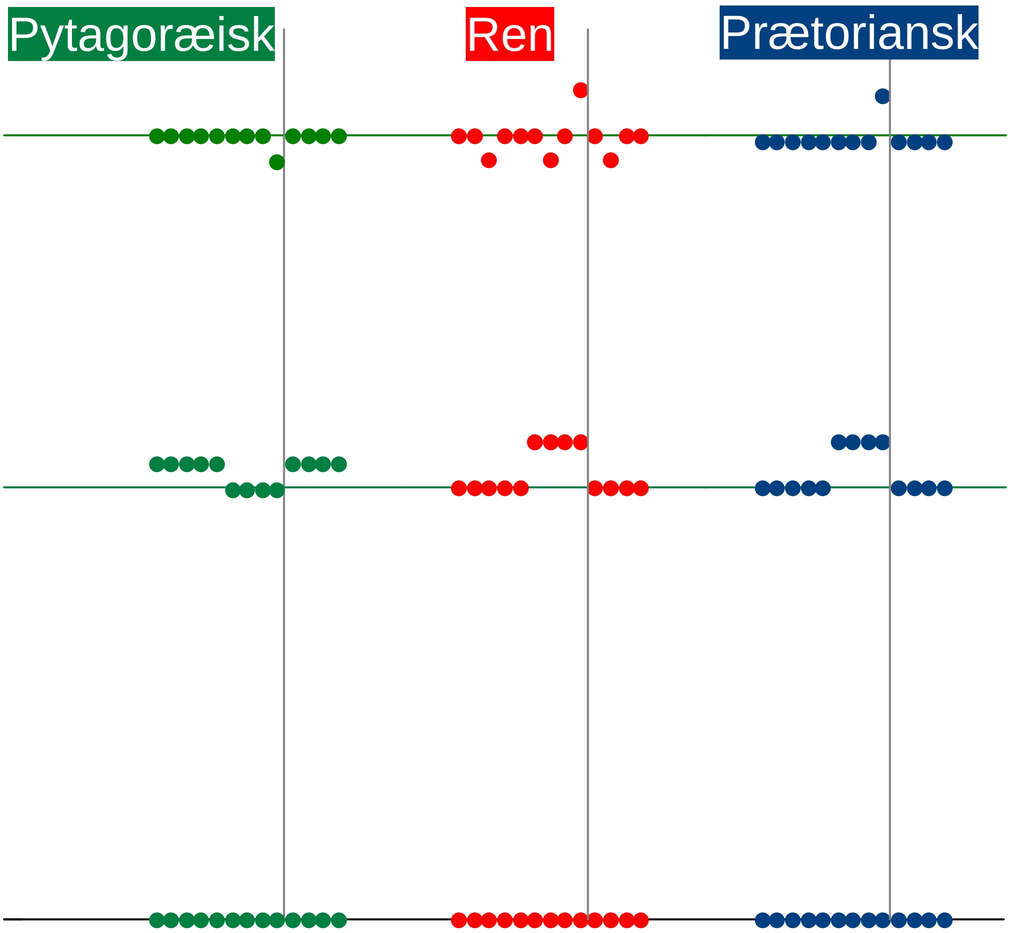
Vi kan kigge på størrelsen af intervallerne.

Små sekunder:
16/15 : e-f, c#-d, d-es, fis-g

Store sekunder:
9/8: c-d, f-g, g-a, a-h
10/9: d-e, es-f



Vi ser at den rene stemning er endnu værre end den Pytagoræiske til at ændre sig når antal fortegn vokser. Men til gengæld har den en fordel.



Treklange: C-G-D-A-E-H-F#-G# streg Eb-Bb-F-C

I den rene stemning er akkorderne omkring C-dur (starten og slutningen) helt rene . Men allerede i D-dur er kvinten meget lav.

Vi ser også at tertsen bliver meget stor når vi nærmer os hullet, og at den springer lidt tilfældigt, hvilket også vil gøre at forskellige tonearter lyder forskelligt.

Samme ide i TI-interactive:

$$F\_ren := \left\{1, \frac{25}{24}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{45}{32}, \frac{3}{2}, \frac{25}{16}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{15}{8}\right\}$$

NB! Uden 2 til sidst!

$$Frek := \mathrm{augment}(F\_ren, 2 \cdot F\_ren)$$

$$\{1.00, 1.05, 1.13, 1.20, 1.25, 1.33, 1.41, 1.50, 1.56, 1.67, 1.78, 1.88, 2.00, 2.11, 2.25, 2.40, 2.50, 2.67, 2.81, 3.00, 3.13, 3.33, 3.56, 3.75\}$$

$$Cent := \frac{\log(Frek)}{\log(2)} \cdot 1200$$

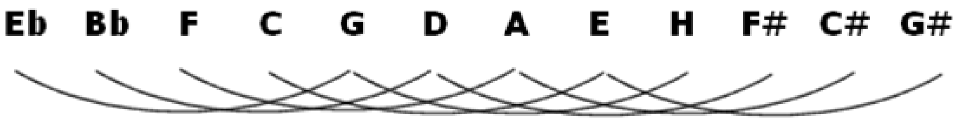
Store terser fra C-G-D ... C (bemærk grundtone i kvintskridt: 1+mod(n*7,12) osv..)

$$Tertser := \mathrm{seq}\left(Cent_{[5+\mathrm{mod}(n\cdot 7,12)]} - Cent_{[1+\mathrm{mod}(n\cdot 7,12)]}, n, 0, 12\right)$$

$$\{386.31, 386.31, 386.31, 407.82, 386.31, 427.37, 405.87, 405.87, 427.37, 386.31, 407.82, 386.31, 386.31\}$$

Den Prætorianske stemning

En af de første stemninger der dropper de rene kvinter er den Prætorianske stemning. Her går man ud fra at alle kvinter er lige store, men ikke så store som rene tertser. I stedet går man ud fra at alle stortertserne er rene



Ren stor-tertser

"Forskellen" på den rene stor-ters+2 oktaver og 4 rene kvinter er det man kalder det Syntoniske komma. Det er det som vi fordeler ud på de fire kvinter her bliver sænket med et ¼ syntonisk komma hver. Derfor er stemningen karakteriseret af "kvart-komma-sænkede kvinter" . Dette kan godt være et meget misvisende udtryk, for i litteraturen omtales mange stemninger med ¼-komma-sænkede kvinter, men her er det stort set altid det Pytagoræiske komma man taler om.

Det pytagoræiske komma er den "fejl" der gør at kvintcirklens ender kommer til at hænge sammen. Det gør det IKKE i denne stemning. Det er det gale komma!

Når den prætorianske stemning ikke omtales ret meget er det fordi den er rigtig dårlig. Ideen er klar – tene terser – og resultatet er dejlig problematisk. Nyd det. Det er den sidste dårlige stemning.

	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#	Eb	Bb	F	C
Præ-Tori-ansk	1	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{2\sqrt[4]{5}}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{4}$	$\frac{5\cdot\sqrt{5}}{8}$	$\frac{25}{8\cdot\sqrt[4]{5}}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{4\cdot\sqrt[4]{5}}{5}$	$\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$	2

Eller

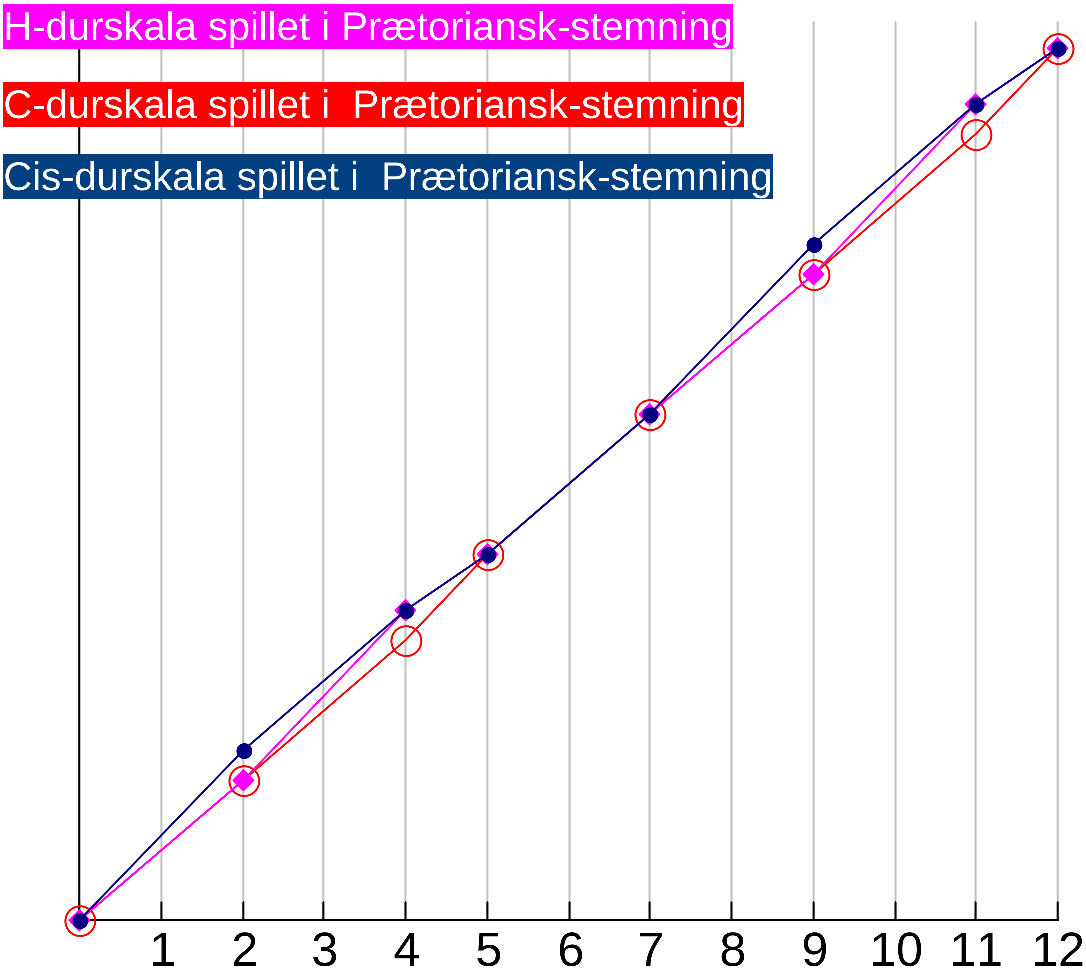
	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	H	C
Præ-Tori-ansk	1	$\frac{25}{8\cdot\sqrt[4]{5}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{4\cdot\sqrt[4]{5}}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$	$\frac{5\cdot\sqrt{5}}{8}$	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{2\sqrt[4]{5}}$	$\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5\cdot\sqrt[4]{5}}{4}$	2

Frekvenserne for a= 440 Hz er

$$\{263.2, 275.0, 294.2, 314.8, 329.0, 352.0, 367.8, 393.5, 411.2, 440.0, 470.8, 491.9, 526.3\}$$

Frekvenserne for c = 249 Hz er

$$\{249.0, 260.2, 278.4, 297.8, 311.2, 333.0, 348.0, 372.3, 389.0, 416.2, 445.4, 465.4, 498.0\}$$



Her ser vi virkelig store forskelle i skalaerne. Dette viser bare hvad vi allerede har antydet. Prisen for at tertserne er ren er et stort spring, i kvintcirklens ender.

Kigger vi på akkorderne (se i slutningen af den rene stemning) ser vi hvordan kvinterne er meget små fra starten. De er så små at man kan høre det.

Der er en kvint der er MEGET stor. Det er den der forbinder ”hullet”.

For tertserne ser vi at alle de akkorder, der har deres terts liggende på den anden side af ”hullet” (H-dur, Fis-dur, Cis-dur, Gis-dur) får alt for store tertser.

Alt i alt er den Prætorianske stemning ikke noget godt bud, når treklangen fra starten af lyder dårligt.

Den ligesvævende stemning

Fra 1600-tallet breder den ligesvævende stemning sig. Det er den vi kender i dag. Her er kvinterne ens. De er alle sammen gjort mindre så de ikke er rene, men de er lige ”falske”.

Eb Bb F C G D A E H F# C# G#

Tempererede kvinter

Men inden vi regner kvinterne ud bestemmer vi den lille sekund. Vi deler oktaven op i 12 lige lange intervaller. Det svarer til at vi ganger med det samme tal 12 gange inden vi er nået en oktav op:

$$k^{12} = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[12]{2} = 1.05946$$

	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#	Eb	Bb	F	C
Lige-svæ-vende	1	$2^{7/12}$	$2^{2/12}$	$2^{9/12}$	$2^{4/12}$	$2^{11/12}$	$2^{6/12}$	$2^{1/12}$	$2^{8/12}$	$2^{3/12}$	$2^{10/12}$	$2^{5/12}$	2

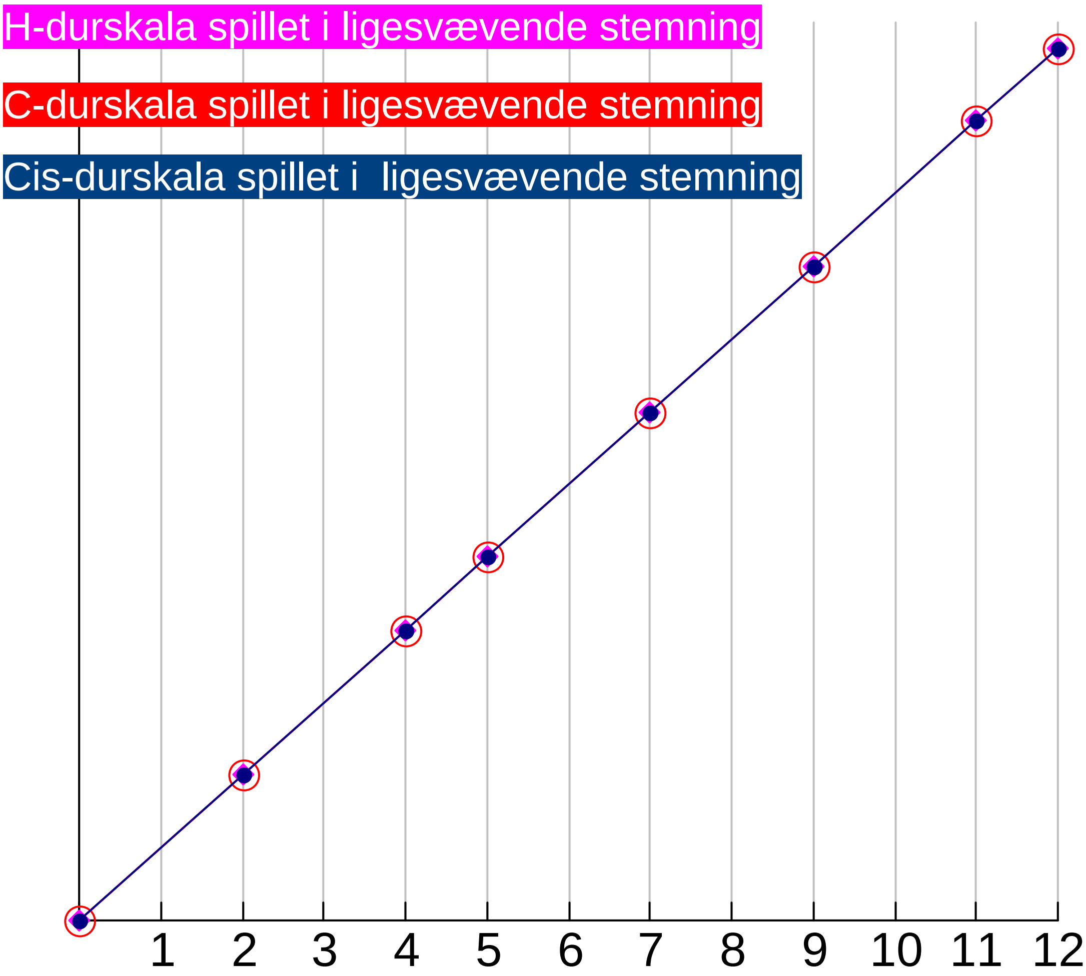
	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	H	C
Lige-Svæ-vende	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	2

Den ligesvævende er selvfølgelig rigtig god i forskellige tonearter. Det er sådan den er lavet. Se skemaet næste side.

Omvendt betyder det at tertserne bliver for store. Det er så meget at man kan høre det. Det var jo det vi hørte fra starten.

På oversigten på første side kan man se, at hvis man gerne vil spille i mange tonearter, så er den ligesvævende stemning bedre end de andre ”når de er værst”.

$$\{261.6, 277.2, 293.7, 311.1, 329.6, 349.2, 370.0, 392.0, 415.3, 440.0, 466.2, 493.9, 523.3\}$$


H-durskala spillet i ligesvævende stemning
C-durskala spillet i ligesvævende stemning
Cis-durskala spillet i ligesvævende stemning
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Bonusspørgsmål:

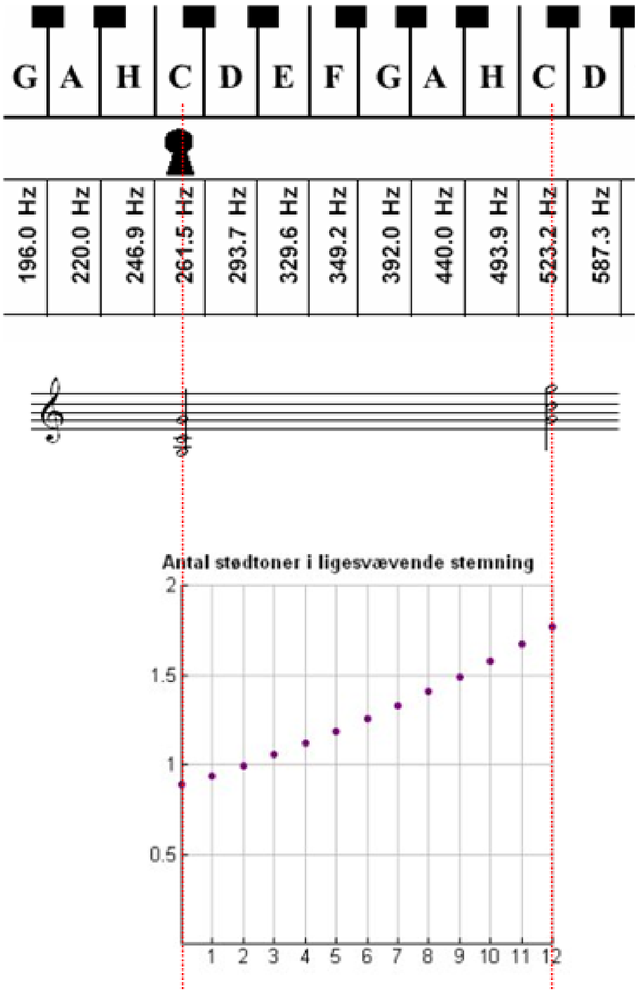
Hvis vi skal stemme et klaver, så det bliver ligesvingende, hvordan kan man så gøre det? Kan vi formulere det med stødtoner som vi gør det i beskrivelsen af den "Wohltemperierte" stemning, så man kan stemme et klaver med øret og et stopur?

For det første skal vi stemme en tone der er omgivet af kvarten under og kvinten over.

Nu vil antal stødtøner bliver 3 gange forskellen mellem midtertonens *rene* værdi og dens faktiske (her ligesvævende) værdi.

Vi ser at antal stødtoner vokser gradvist (dvs eksponentielt) fra omkring 0.9 pr sekund til 1.8 pr sekund.

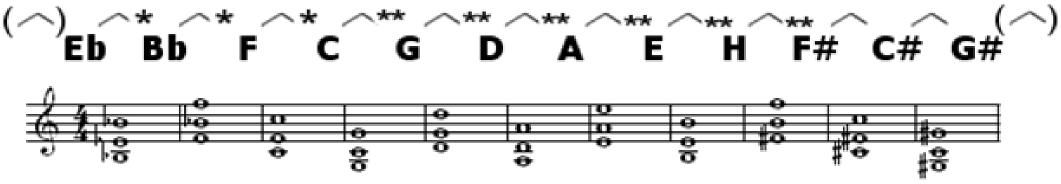
Lytter man til et klaver (der stemmer) kan man godt høre "noget" der svinger omkring den hastighed. Det lyder ikke direkte som volumen, men mere som klangen der åbne-lukker sig: WA-u-WA-u-WA-u



"Wohltemperierte Clavier" og Bach-stemning

Den stemning som Johan Sebastian Bach brugte til at skrive bl.a. "Wohltemperierte Clavier" var ikke den ligesvævende stemning vi kender i dag.

Det var en stemning hvor enkelte kvinter var rene men hvor andre var sænket i forhold til antal stødtoner. Da antal stødtoner jo afhænger af i hvilken oktav vi tager et interval skal vi være mere præcise nu.

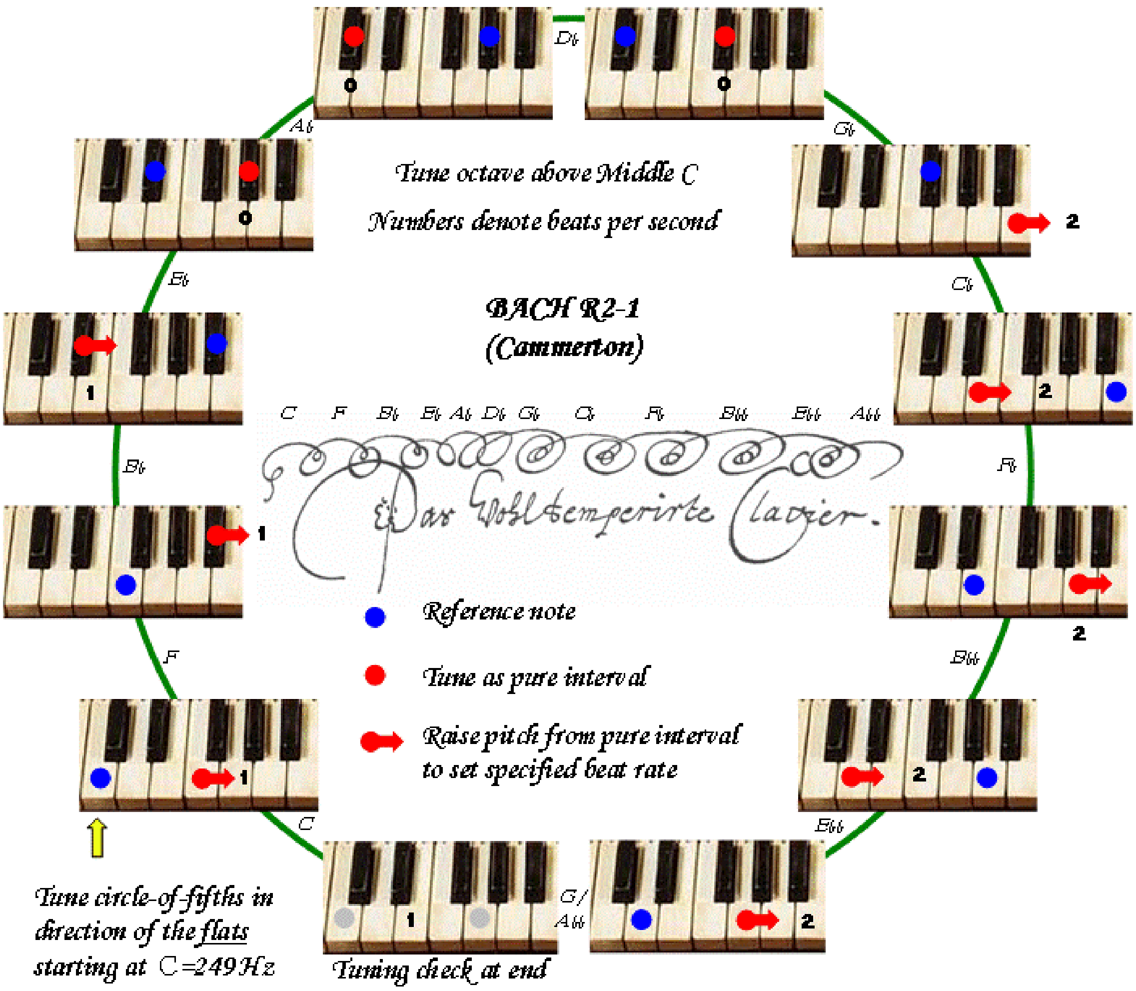


︿ Ren kvint

︿ * Sænket kvint med en stødtone pr sek.

︿ ** Sænket kvint med to stødtoner pr sek.

En anden måde at illustrere det på:



http://www.bach-cantatas.com/Articles/Das_Wohltemperirte_Clavier.htm

	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#
”Wohl-tempe-rie.” *)	1	$f_D \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_A \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_E \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_H \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_{Fis} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_{Cis} \cdot \frac{4}{3}$	$f_{Gis} \cdot \frac{4}{3}$	$f_{Eb} \cdot \frac{4}{3}$

	Eb	Bb	F	C
”Wohl-tempe-rie.” *)	$f_{Bb} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$	$f_F \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	$f_C \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	2

*) Forudsætter at vi regner med C = 249 Hz i Intervallet 249Hz-498 Hz

Eller

	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G
”Wohl-Tempe-rie.” *)	1	$f_{Gis} \cdot \frac{4}{3}$	$f_A \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_{Bb} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	$f_H \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_C \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	$f_{Cis} \cdot \frac{4}{3}$	$f_D \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$

	G#	A	Bb	H	C
”Wohltemperie.” *)	$f_{Eb} \cdot \frac{4}{3}$	$f_E \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	$f_F \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$	$f_{Fis} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$	2

*) Forudsætter at vi regner med C = 249 Hz i Intervallet 249Hz-498 Hz

Denne stemning opererer altså både med multiplikative elementer i de rene intervaller, men også i additive i antal stødtoner.

Da stødtoner ændrer sig som andre toner i forskellige oktaver, er det her afgørende at man starter med den rigtige frekvens, og at man bliver i det rigtige interval.

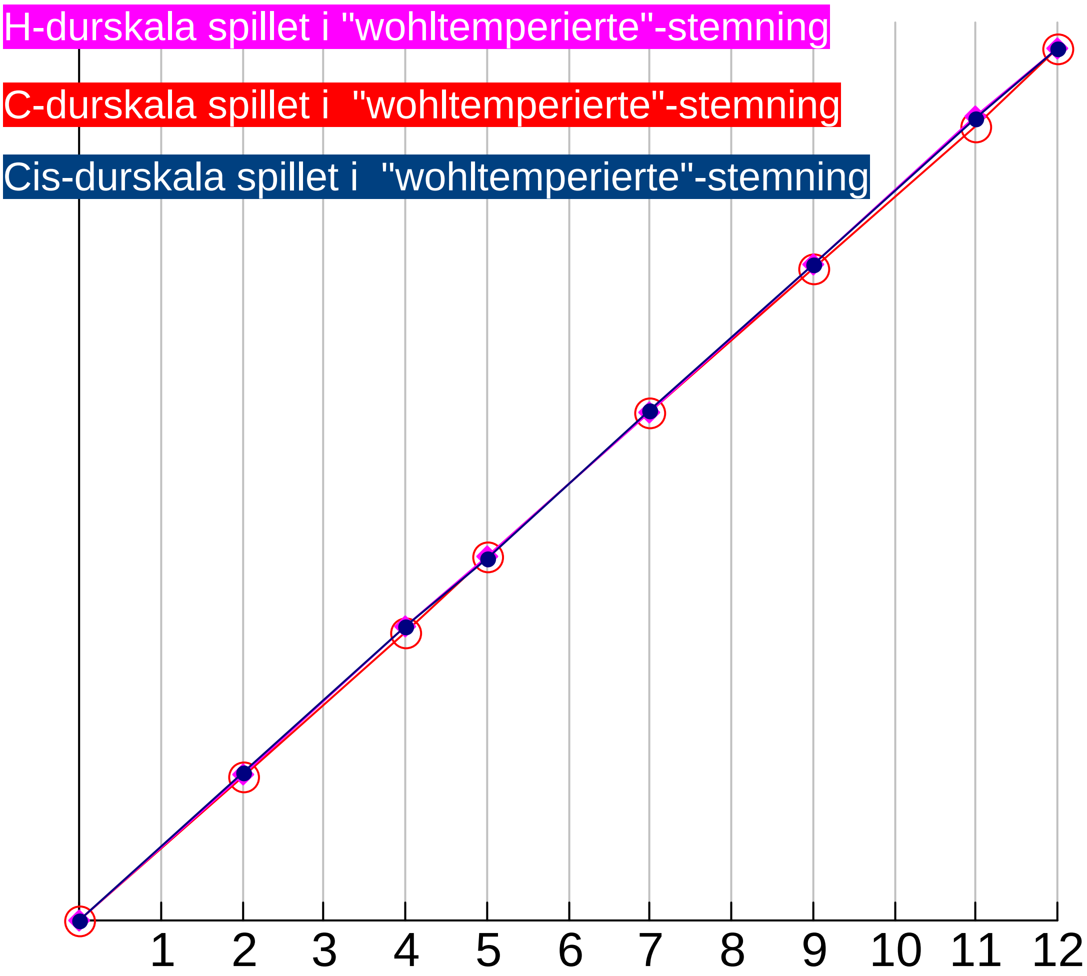
På tegningen på næste side ser vi, hvordan denne stemning ikke er en ren ligesvævende, men at der er meget små forskelle mellem fjerne tonearter.

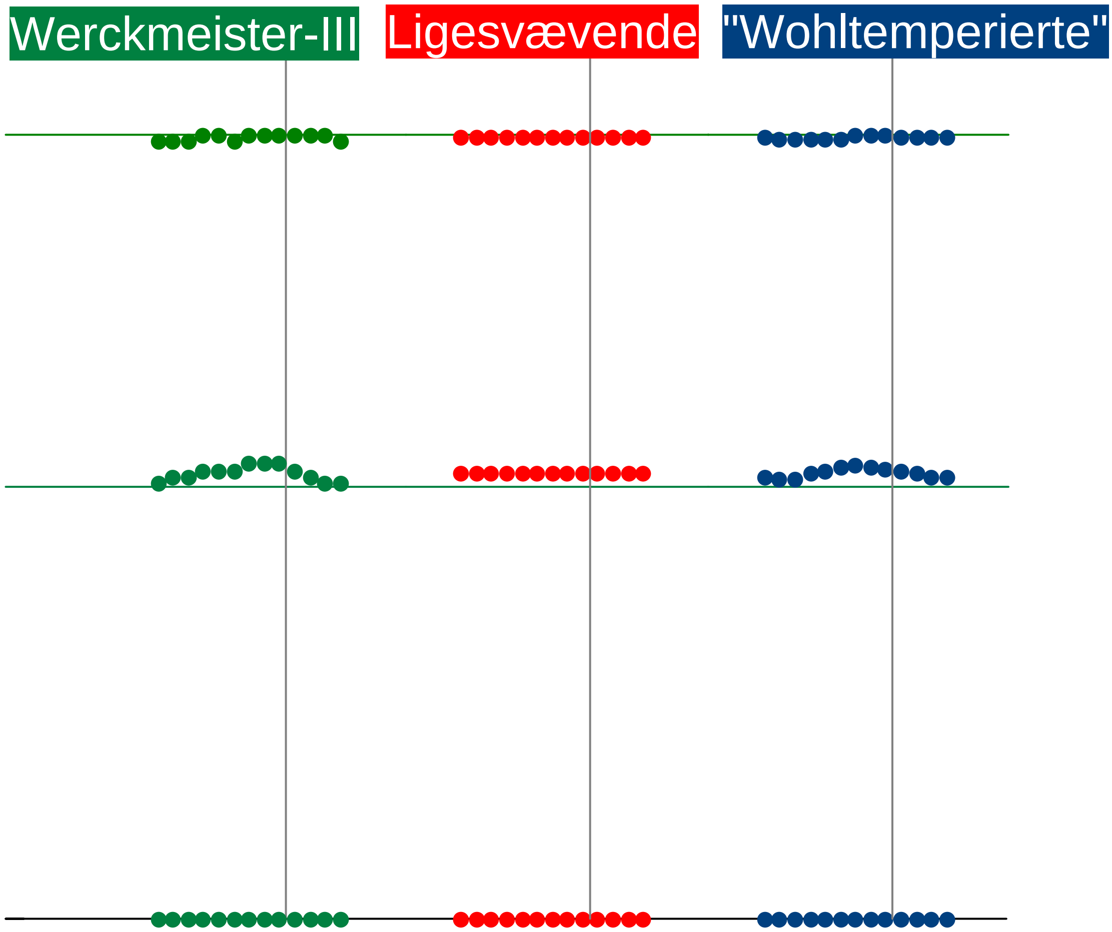
Frekvenserne for a= 440 Hz er

$$\{249.0, 263.1, 279.3, 296.0, 312.9, 332.3, 350.8, 373.0, 394.6, 417.9, 443.4, 468.4, 498.0\}$$

Frekvenserne for c = 249 Hz er

$$\{262.2, 277.0, 294.0, 311.6, 329.4, 349.9, 369.3, 392.7, 415.5, 440.0, 466.9, 493.1, 524.3\}$$


H-durskala spillet i "wohltemperierte"-stemning
C-durskala spillet i "wohltemperierte"-stemning
Cis-durskala spillet i "wohltemperierte"-stemning
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Treklange: C-G-D-A-E-H-F#-G# streg Eb-Bb-F-C

Ser vi på klangene bemærker vi noget sjovt. Den stemning vi arbejder med her er den yderst til højre. For det første ser vi at der ikke er nogen "brud" nogle steder. Kvinterne er næsten rene men ikke helt ens. Tertserne er bedre end den ligesvævende for akkorderne F, C, G, D og dårligere for H, Fis, Cis og Gis.

At kvinterne ikke er ens er klart. Hvis alle kvinter var ens ville tertserne også være det … og så ville vi have den ligesvævende.

Denne toneart klinger altså bedre i det område vi bruger meget og lidt dårligere i "yderområderne" uden det er helt håbløst.

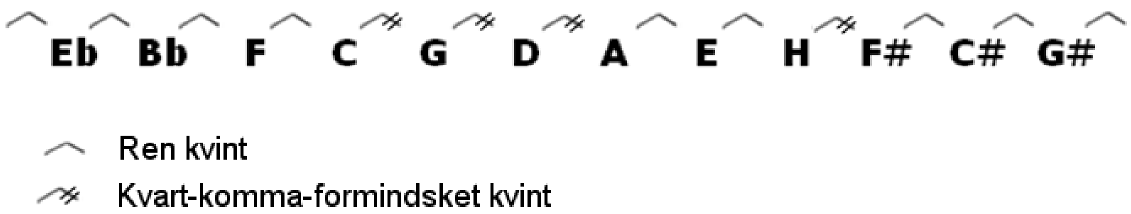
Werckmeister-I. En anden Bach-stemning

Andreas Werkmeister (1645-1706) er en tysk organist og musikteoretiker, der udvikler en lang række stemninger. Hans stemning ”Werkmeister I” betragter han selv som særlig velegnet til at spille kromatisk musik. Han har andre stemninger der er særlig gode til diatonisk musik.

Den går også nogle gange under navnet Werck-meister-III, men det er der også en anden der gør!, som vi skal se på om lidt.

http://en.wikipedia.org/wiki/Werckmeister_temperament

Udgangspunktet er at de feslste kvinter er rene, men at fire af dem er formindskede, så kvinterne passer hele vejen rundt i kvintcirklen.



Da ”fejlen” er fordelt på fire lige store kvinter kan vi sætte deres frekvens-forhold til k. For at bestemme k siger vi som da vi påviste konflikten mellem rene kvinter og oktaver:

Hvis vi går 12 kvinter op så har vi HER ganget med

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^8 \cdot k^4$$

fordi de 8 kvinter er rene og de 4 er sænkede lige meget

Hvis vi går 7 oktaver op, så kommer vi til samme tone, hvis ”enderne mødes” i kvintcirklen. Her er frekvensen ganget med

$$2^7$$

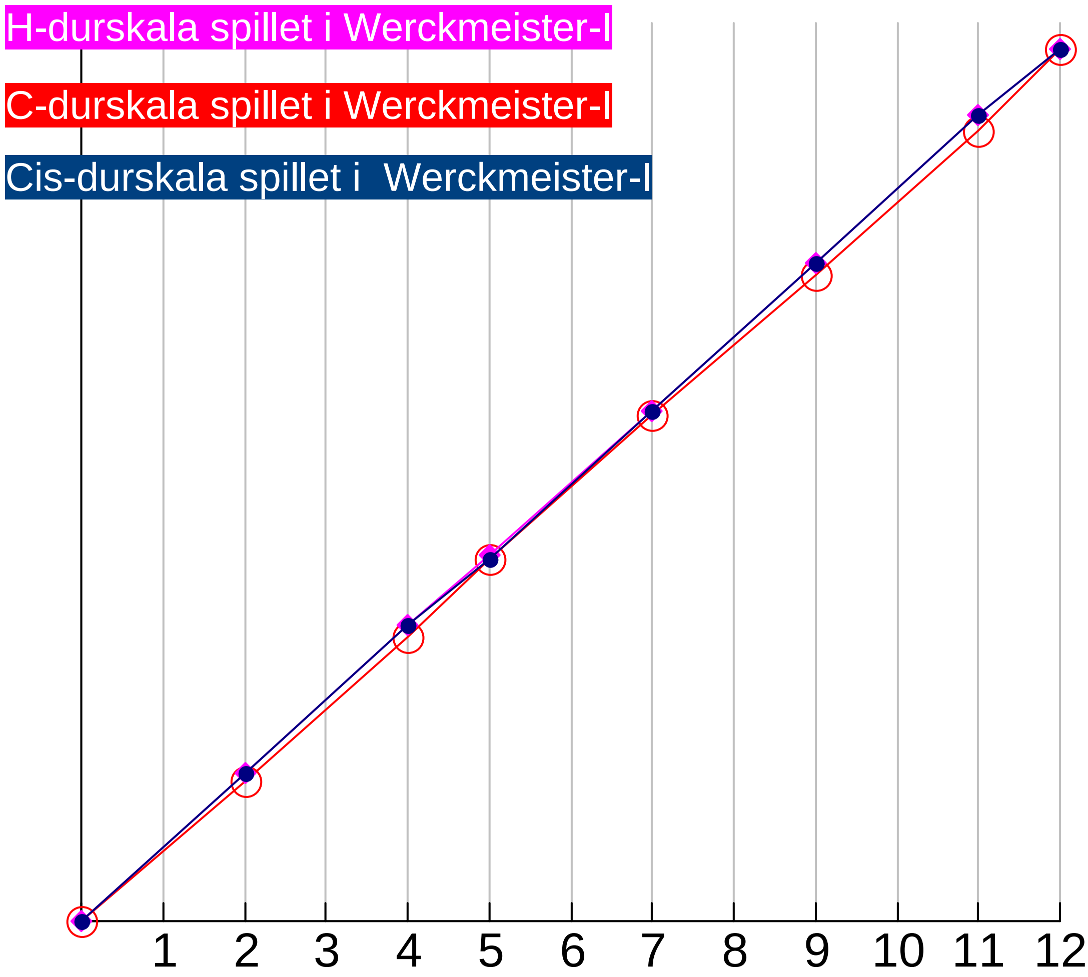
Dermed besrmmer vi k som løsning til

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^8 \cdot k^4 = 2^7 \Leftrightarrow k = \tfrac{8}{9}\sqrt[4]{8}$$

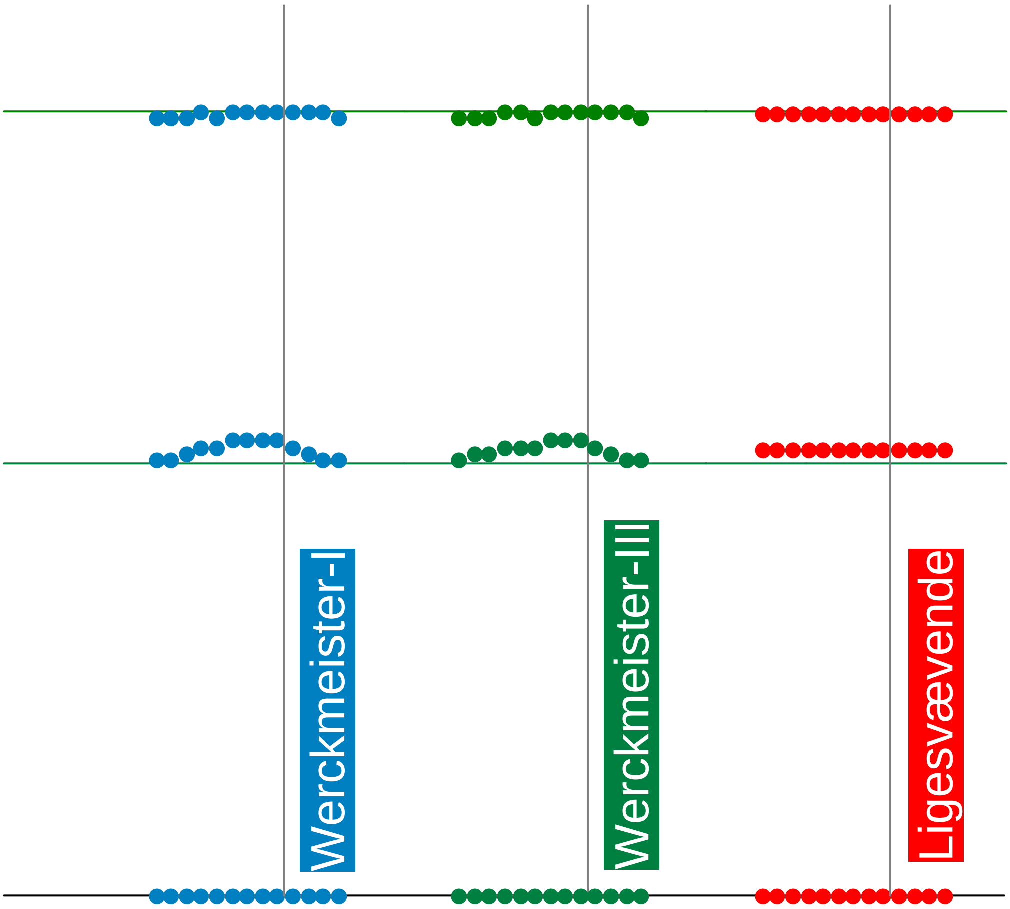
Note	Exact frequency relation
C	$\frac{1}{1}$
C#	$\frac{256}{243}$
D	$\frac{64}{81}\sqrt{2}$
D#	$\frac{32}{27}$
E	$\frac{256}{243}\sqrt[4]{2}$
F	$\frac{4}{3}$
F#	$\frac{1024}{729}$
G	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{8}$
G#	$\frac{128}{81}$
A	$\frac{1024}{729}\sqrt[4]{2}$
Bb	$\frac{16}{9}$
B	$\frac{128}{81}\sqrt[4]{2}$

$\{247.5, 260.7, 276.6, 293.3, 310.1, 330.0, 347.7, 370.0, 391.1, 413.4, 440.0, 465.1, 495.0\}$

$\{249.0, 262.3, 278.2, 295.1, 312.0, 332.0, 349.8, 372.2, 393.5, 415.9, 442.7, 467.9, 498.0\}$



Denne stemning klarer sig ikke så godt som de andre – "Wohltemperierte", lige-svævende og Werckmeister-III



Treklange: C-G-D-A-E-H-F#-G# streg Eb-Bb-F-C

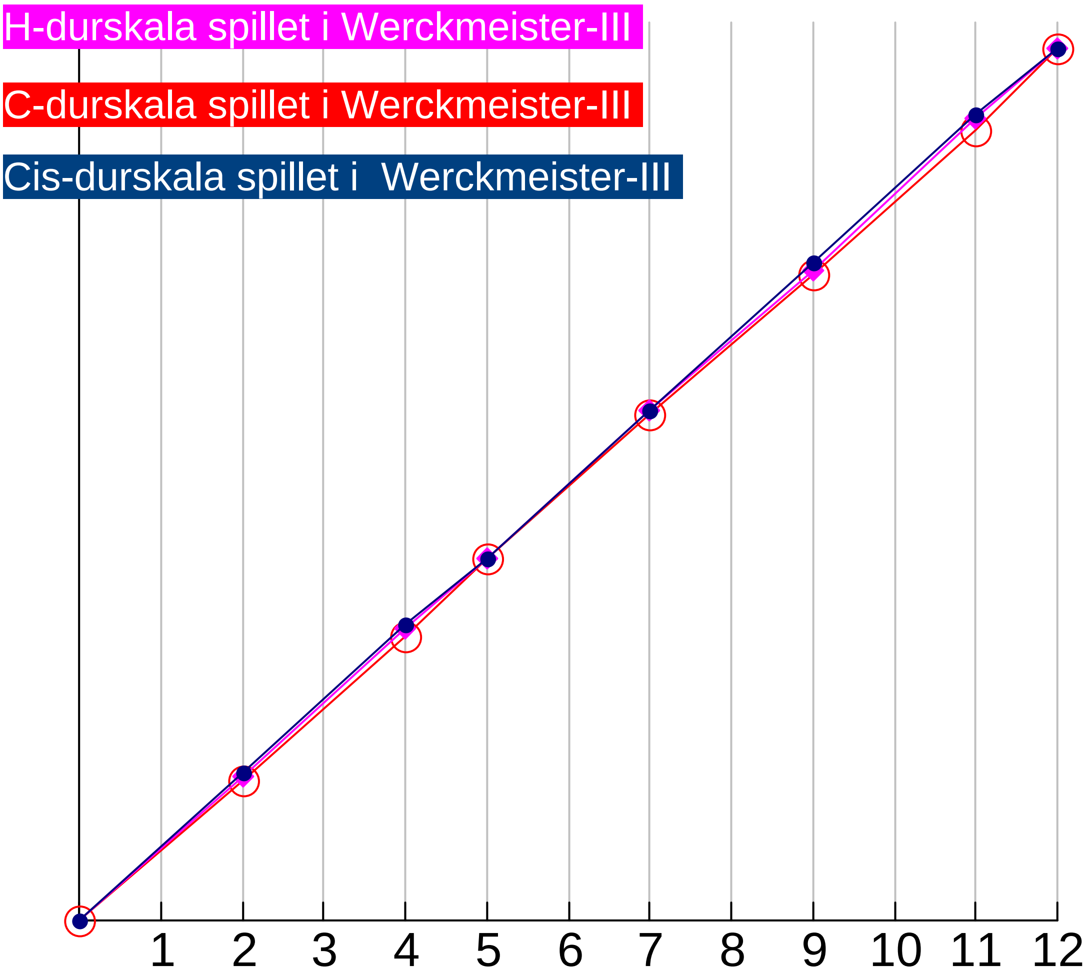
Vi ser at de to Werckmeister-stemninger opfører sig nogenlunde ens. De er bedre omkring C end den ligesvævende, men tertser og kvinter svinger lidt.

Werckmeister III – endnu en anden Bach-stemning

5 kvinter sænket med det k vi beregnede på sidste side mens en kvint er HÆVET med samme k-værdi. Frekvens-forholdet fremgår af listen nedenfor. Forklar hvordan vi kommer frem til dem.

	C	G	D	A	E	H	F#	C#	G#	Eb	Bb	F	C
Werck-Mei-ster-III	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\sqrt[4]{8}$	$\frac{8}{9}\sqrt{2}$	$\frac{4}{3}\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{2}$	$\frac{128}{81}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{9}{8}\sqrt[4]{2}$	2

	C	C#	D	Eb	E	F	F#	G	G#	A	Bb	H	C
Werck-Mei-ster-III	1	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{2}$	$\frac{9}{8}$	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{8}{9}\sqrt{2}$	$\frac{9}{8}\sqrt[4]{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\sqrt[4]{8}$	$\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{4}{3}\sqrt{2}$	2



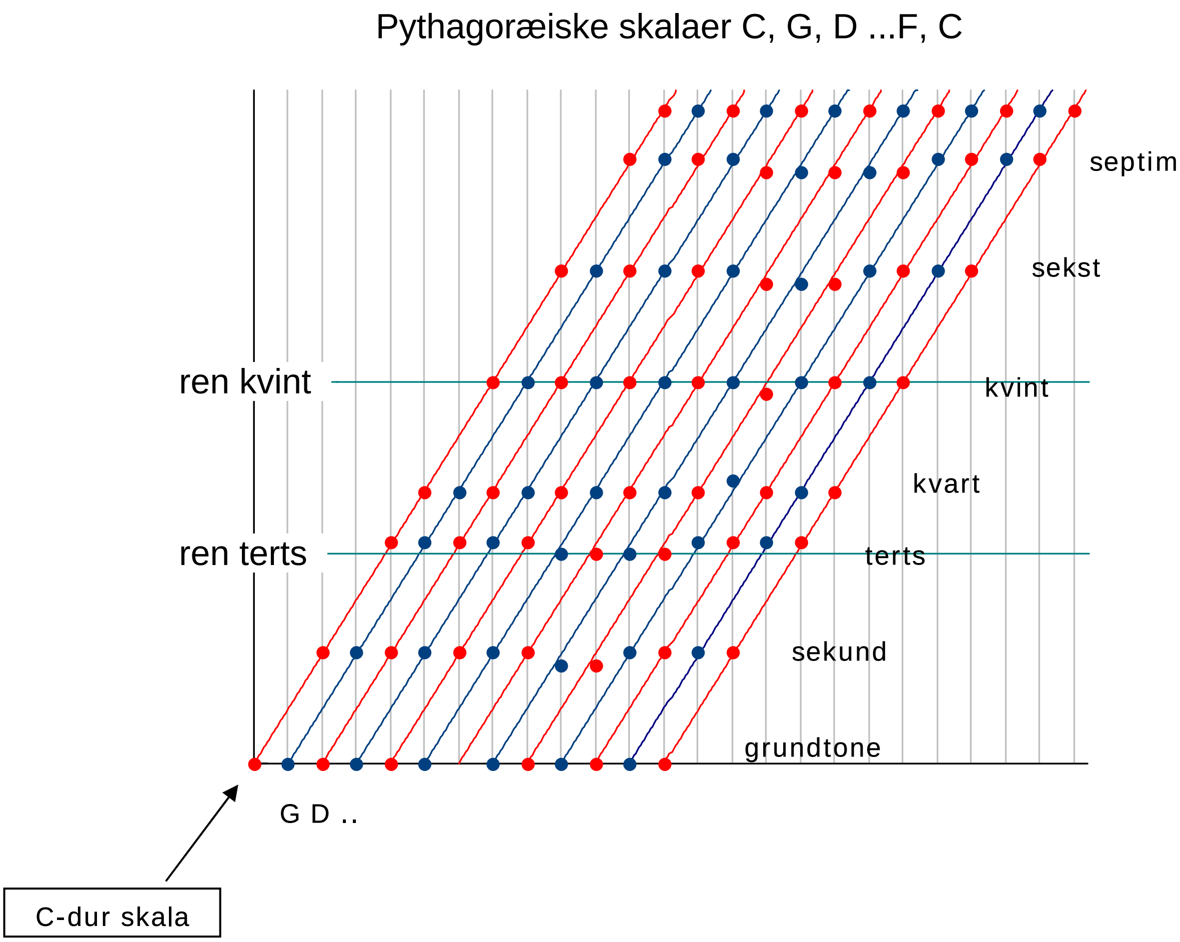
Vi ser at denne skala også er rimelig robust overfor ”fremmede” tonearter.

Ser vi på treklangene. Se tidligere, så ser vi at tendensen er som i den ”Wohl-temperierte”. Tertserne omkring C er bedre og de fjernere liggende er dårligere. Her er udsvingene bare lidt større både i kvinter og tertser.

$\{261.6, 276.6, 294.3, 311.1, 328.9, 350.0, 370.0, 392.4, 413.4, 440.0, 466.7, 493.3, 523.3\}$

$\{249.0, 263.2, 280.1, 296.1, 313.0, 333.1, 352.1, 373.5, 393.5, 418.8, 444.2, 469.5, 498.0\}$

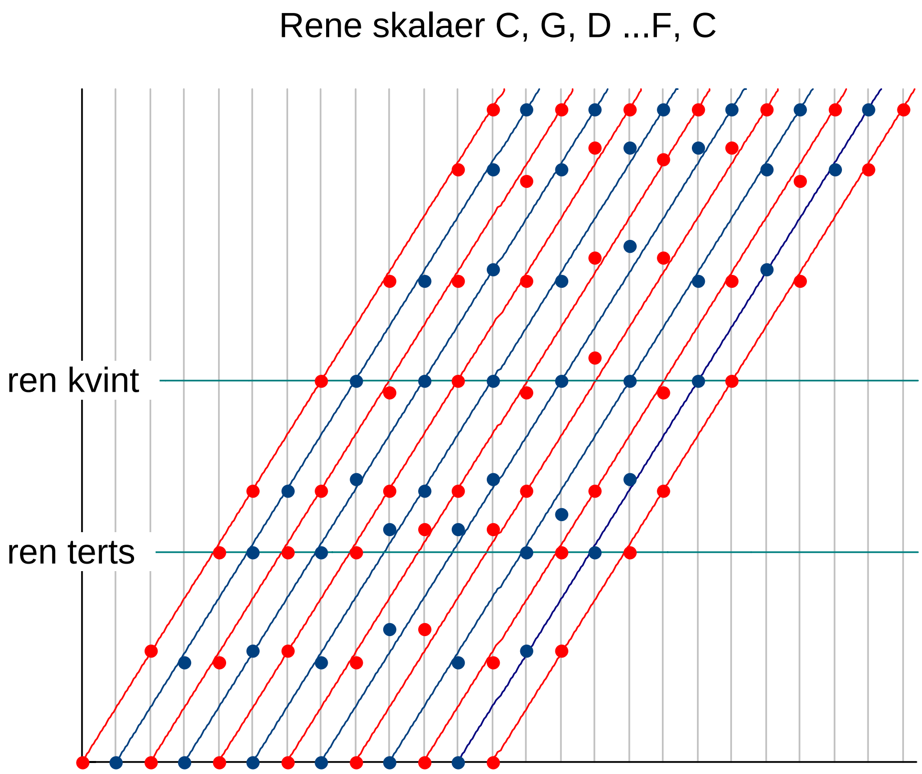
En anden grafisk fremstilling:



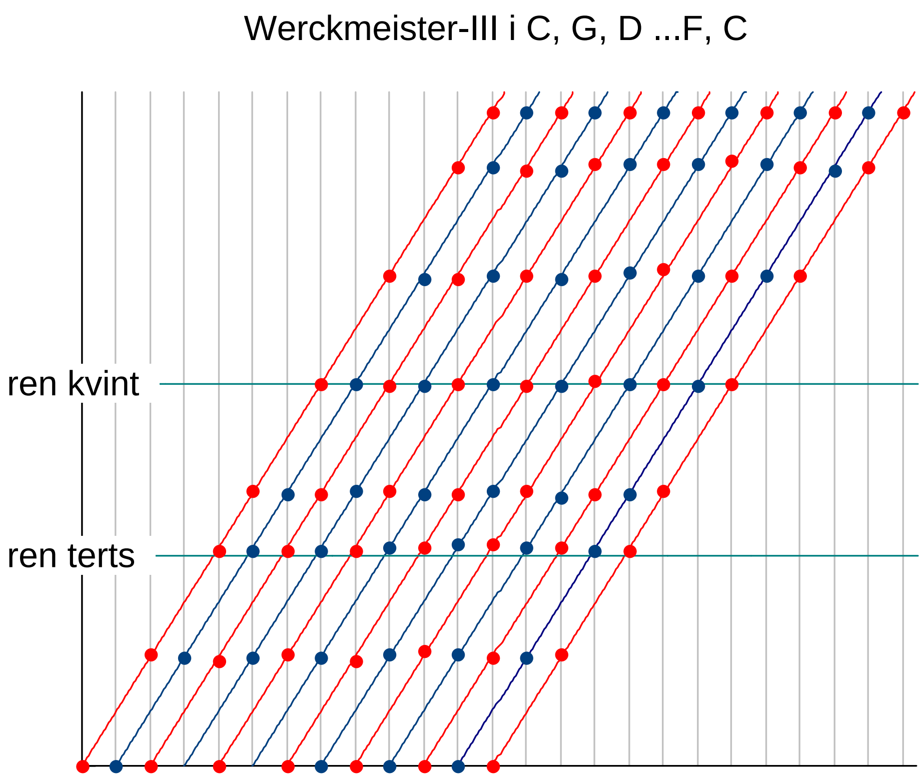
I denne tegning får vi stort set samlet alt. Den første røde streg repræsenterer C-durskalaen, den anden G-dur skalaen osv.

Kigger vi hen over skalaerne kan vi se hvordan sekunderne ligger nogenlunde end indtil vi kommer hen til 8. og 9. toneart (det er C#-dur og G#-dur).

Vi ser at mange af intervallerne springer lidt. Det betyder at de forskellige tonearter ikke lyder ens. Men vi kan også se hvordan de lyder. I den Pytagoræiske stemning ligger kvinterne pænt, men tertserne er meget store. Problemerne omkring de underlige spring de Phytagoræiske skalaer laver inde i midten skyldes, at kvintcirklen ikke "hænger sammen".

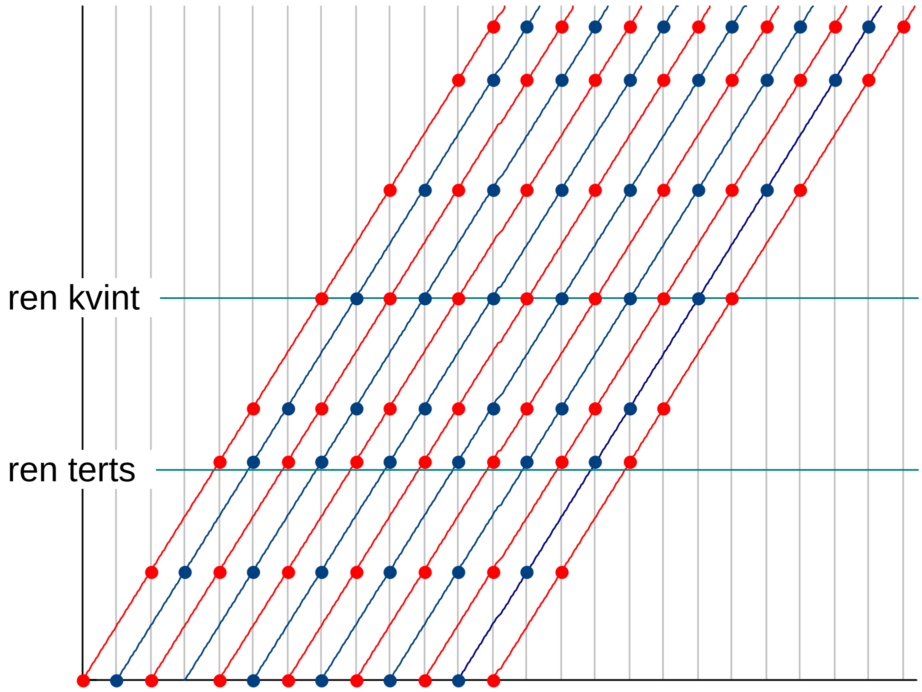


Den rene skala er den der skifter mest selv tæt ved C-dur. Treklangen er ren!



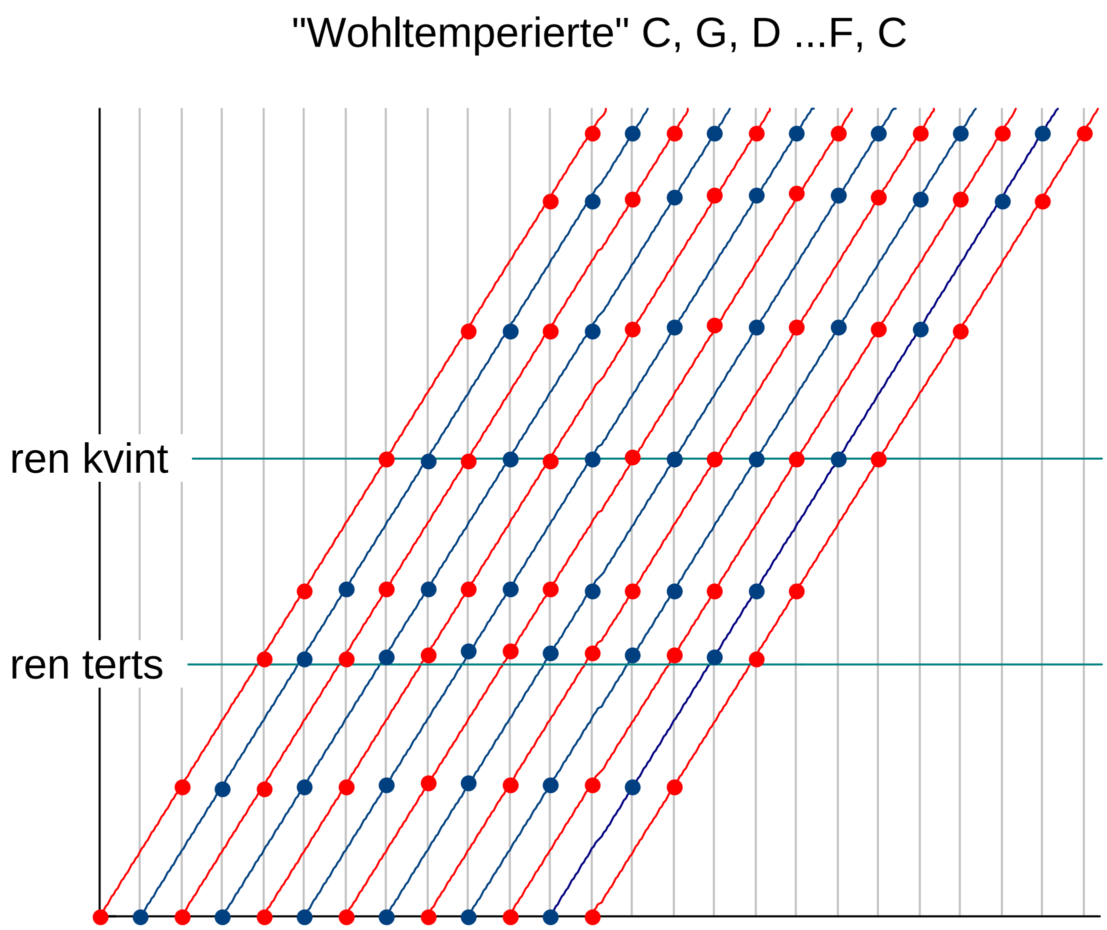
Her ser vi at intervallerne ændres i bløde buer. Hver toneart har sin ”personlighed”. Der er ingen ”knæk”. Treklangen er renere omkring C. Bemærk den *hævede* kvint!

Ligesvævende skalaer C, G, D ...F, C



I den ligesvævende er alle intervaller ”harmoniseret”. Prisen er så at ingen tre-klange lyder rent.

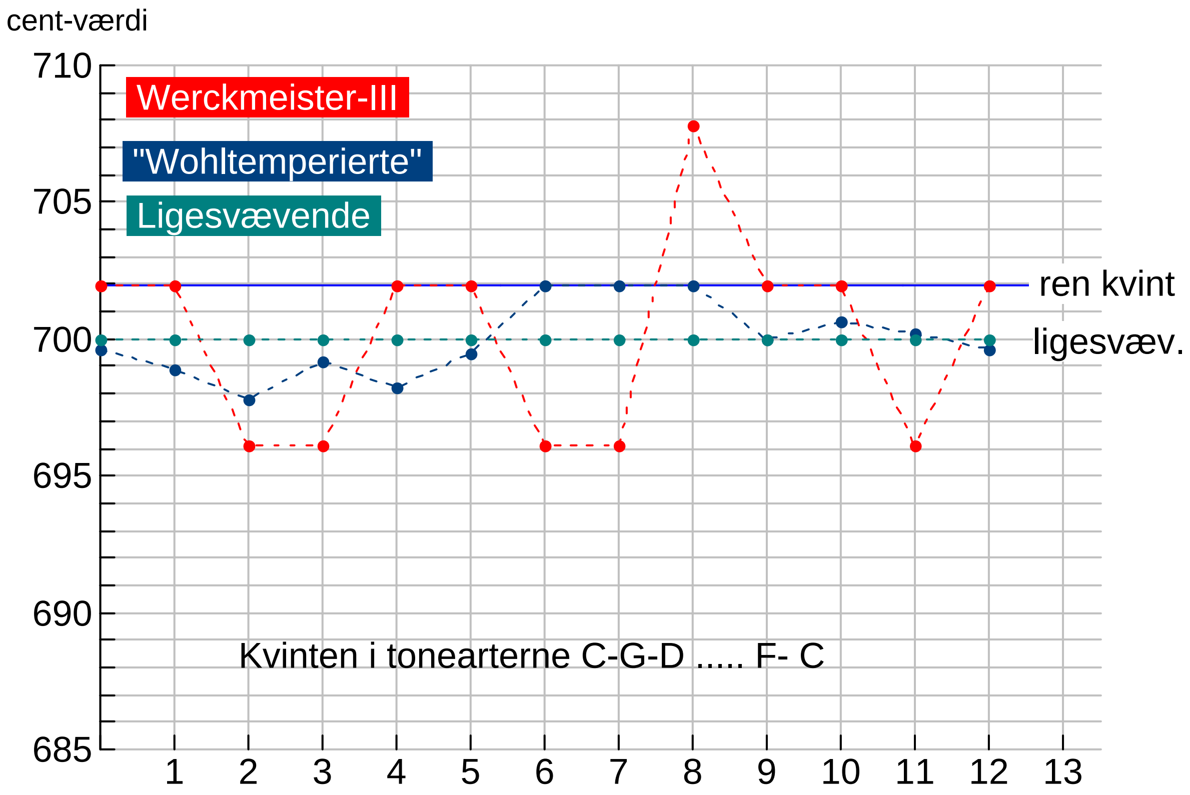
Og skal der være en vinder …

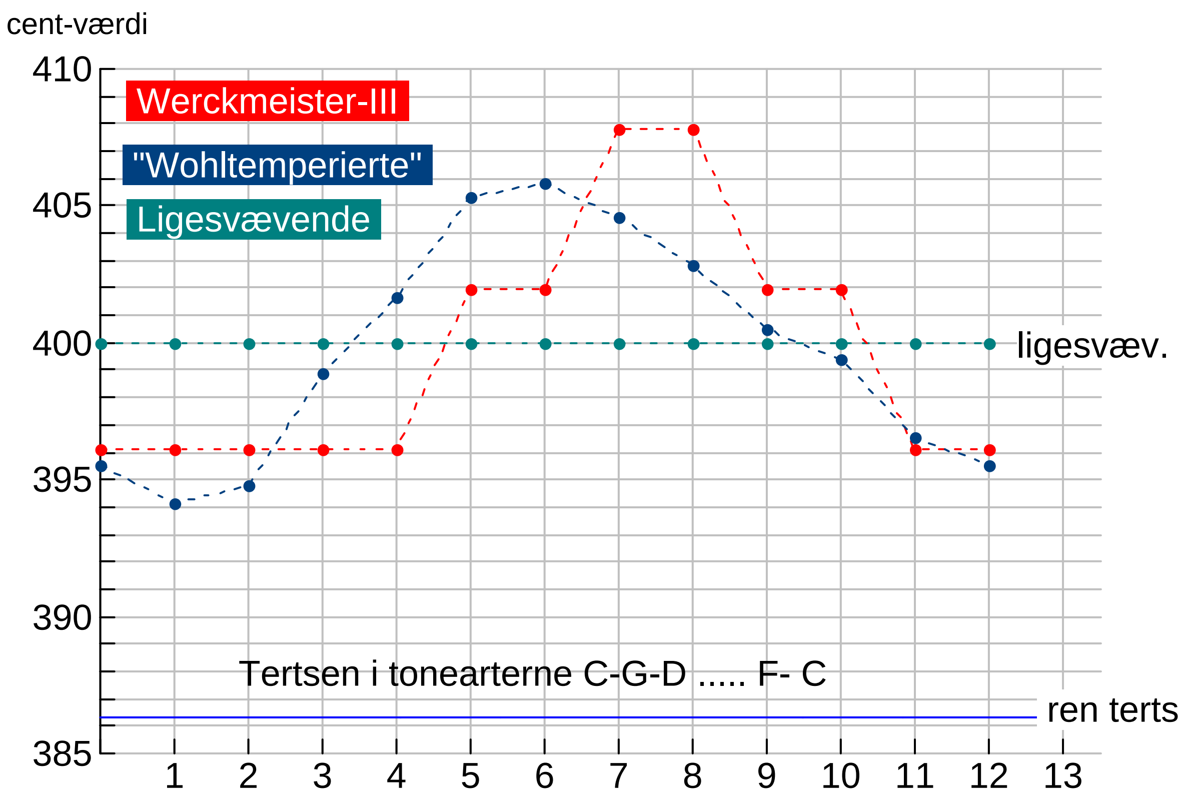


… så er dette den stemning der i videst mulig omfang tager hensyn til begge vores hensyn. Her er tonearterne lidt forskellige, men det er meget lidt. Det er tydeligt at se at tertserne omkring ”toppen” af kvintcirklen (F-C-G-D) er renere end i den ligesvævende.

Men det er i sidste ende en smags sag. Som man kan se på næste side så er kvinterne dårligere omkring C-F-G-dur, men tertserne er meget bedre. Spørgsmålet er så om en ”uren” kvint forstyrrer mere end en ”uren” terts.

Hvis man kigger på nettet, så er der en kult af mennesker der sværger til de gamle stemninger. Det er åbenbart noget man sagtens kan være uenige om


cent-værdi
710
705
700
695
690
685
Werckmeister-III
"Wohltemperierte"
Ligesvævende
ren kvint
ligesvæv.
Kvinten i tonearterne C-G-D ..... F- C
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13


cent-værdi
410
405
400
395
390
385
Werckmeister-III
"Wohltemperierte"
Ligesvævende
ligesvæv.
Tertsen i tonearterne C-G-D ..... F- C
ren terts
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13