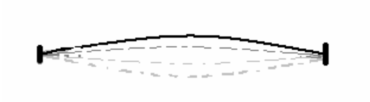
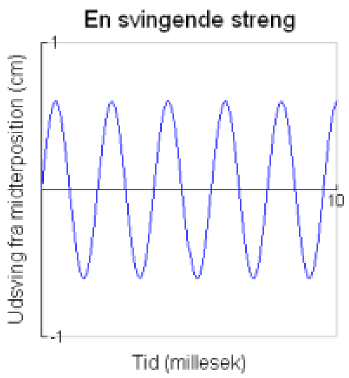
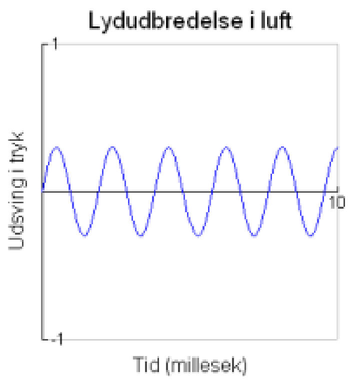
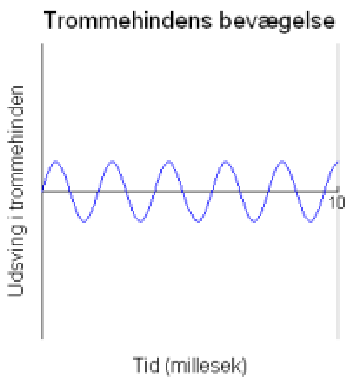
Stemninger

10-04-2007 11:27

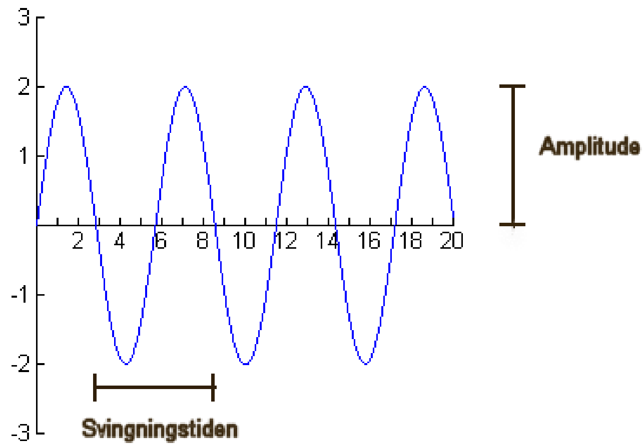
Fra lyd-kilde til øre – et eksempel.

En streng slåes an.	Lydbølgens udbredelse gennem luften	Lyden når øret
		
Betragt midtpunktet på strengen. Bevægelsen over tid kan beskrives ved:  	Hvordan ændres trykket I et punkt ud for øret? Ændringen over tid kan beskrives ved:  	Betragt midtpunktet på tromme-hinden. Bevægelsen over tid kan beskrives ved: 

Bemærk at de tre grafer ligner hinanden, men at selvom det er den samme "lyd" der beskrives på tre forskellige måder, og selvom disse beskrivelser har tydelige lighedspunkter, så er det tre forskellige ting der beskrives.

I det følgende vil vi beskrive lyd ved svingninger, uden at gå meget op i hvilke af de tre kurver det er.

Amplitude, svingningstid og frekvens.



Amplituden angiver hvor kraftig tonen er.

Svingningstiden er den tid I sekunder det tager at gennemløbe en en svingning.

I stedet for svingningstiden benytter man som regel frekvensen, der angiver antal svingninger pr sekund. Der gælder

$$frekvens = \frac{1}{svingningstiden}$$

En simpel matematisk beskrivelse af en tone er som ovenfor at beskrive udsving (eller trykændring) som en sinusfunktion:

$$g(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot x)$$

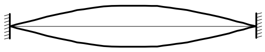
hvor f er frekvensen og A er amplituden. Når x løber fra 0-1 vil udtrykket løbe gennem *f* perioder af 2π .

Links:

http://www.physicsclassroom.com/Class/sound/soundtoc.html
http://rooster.stanford.edu/~ben/sound/tuning.html

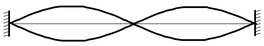
Overtoner og partialtoner.

Hver gang vi hører en tone fx fra en streng der bliver slået an, så hører vi samtidig nogle overtoner. Ofte er grundtonen den kraftigste og så bliver overtonerne svagere og svagere. Overtoneforholdet for et instrument er en vigtig del af instrumentets klang. Disse toner kaldes også partialtoner, og det er mere fornuftigt, fordi den kraftigste tone ikke behøver være grundtonen (1. partialtone), men kan sagtens være den første overtone (2. partialtone).



Grundtonen
(1. partialtone)

Har frekvensen *f*

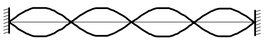


1. Overtone
(2. partialtone)

Tonen svarer til grundtonen for en streng der er halvt så lang. Frekvensen er 2*f* og tonen ligger en *oktav* over

2. overtone
(3. partialtone)

Tonen svarer til grundtonen for en streng der kun er 1/3 af den oprindelige. Frekvensen er 3*f*. Den ligger en oktav+kvint over grundtonen.

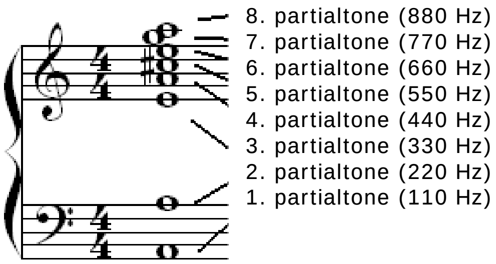


3. overtone
(4. partialtone)

Tonen svarer til grundtonen for en streng der kun er 1/4 af den oprindelige. Frekvensen er 4*f*. Den ligger to oktaver over grundtonen.

4. overtone
(5. partialtone)

Tonen svarer til grundtonen for en streng der kun er 1/5 af den oprindelige. Frekvensen er 5*f*. Den ligger to oktaver+stor terts over grundtonen.



I disse overtoner kan vi lære noget vigtigt om toner og stemninger.

Se vi på forholdet mellem grundtonen og 1. overtone så finder vi at der er en *ren oktav* mellem to toner hvis frekvensforholdet er 2:1. Som regel siger vi bare at frekvensforholdet er 2.

En svingning på 110 Hz svarer til tonen a. Hvis vi ser på tonen med den dobbelte frekvens 220 Hz, så er det også a. De næste a-toner har frekvenserne 440 Hz, 880 Hz, 1760 Hz osv.

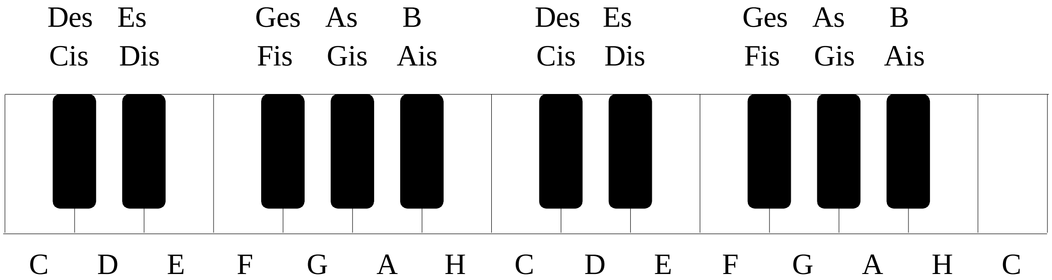
Ser vi på forholdet mellem 1. og 2. overtone så er frekvensforholdet 3/2 og afstanden mellem dem er en *ren kvint*.
Hvis a er 220 Hz så er tonen e på 3/2*220 = 330 Hz en *ren kvint* over.

Ser vi på forholdet mellem 3. og 4. overtone så er frekvensforholdet 5/4 og afstanden mellem dem er en *ren stor-terts*.
Hvis a er 440 Hz så er tonen cis på 5/4*440 = 550 Hz en *ren stor-terts* over.

Vi kunne også se på 3. og 4. tone og finde den *rene kvart*, men den behøver vi ikke bruge her.

Rene intervaller eller ligesvævende?

Vores klaverer i dag er ikke stemt i rene kvinter og rene stor-tertser fordi det viser sig at give nogle problemer.



I stedet har vi valgt at sige at der skal være lige langt mellem alle toner, både de sorte og de hvide. Det giver den fordel at vi ikke behøver at beslutte om vi skal stemme den første sorte tangent ovenfor som en halv tone under *d* eller som en halv tone over *c*. Det bliver nemlig samme tone.

Som vi skal se i det efterfølgende, så er det kun tilfældet for ganske få af de stemninger, der gennem tiden har været brugt.

I den ligesvævende siger man at hvis vi skal dele oktaven op i 12 lige lange intervaller, så svarer det til at vi ganger det frekvensforhold der så svarer til at gå en halv tone op, det ganger vi på tolv gange inden vi er nået en oktav op:

$$k^{12} = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[12]{2} = 1.05946$$

Opgave:
En Cdur-treklang består af grundtonen+tonen en stor terts over grundtonen + tonen en kvint over grundtonen. Vi skal prøve at beregne frekvenserne hvis disse intervaller er rene og hvis de er ligesvævende.

Lad C have frekvensen 261.5 Hz. Når du skal bestemme frekvenserne for den rene treklang, skal du benytte de pæne talforhold vi så på sidste side. For den Ligesvævende treklang skal du regne ud hvor mange halvtonetrin (tangenter) vi går op fra *c* til henholdsvis *e* og *g*.

REN-treklang

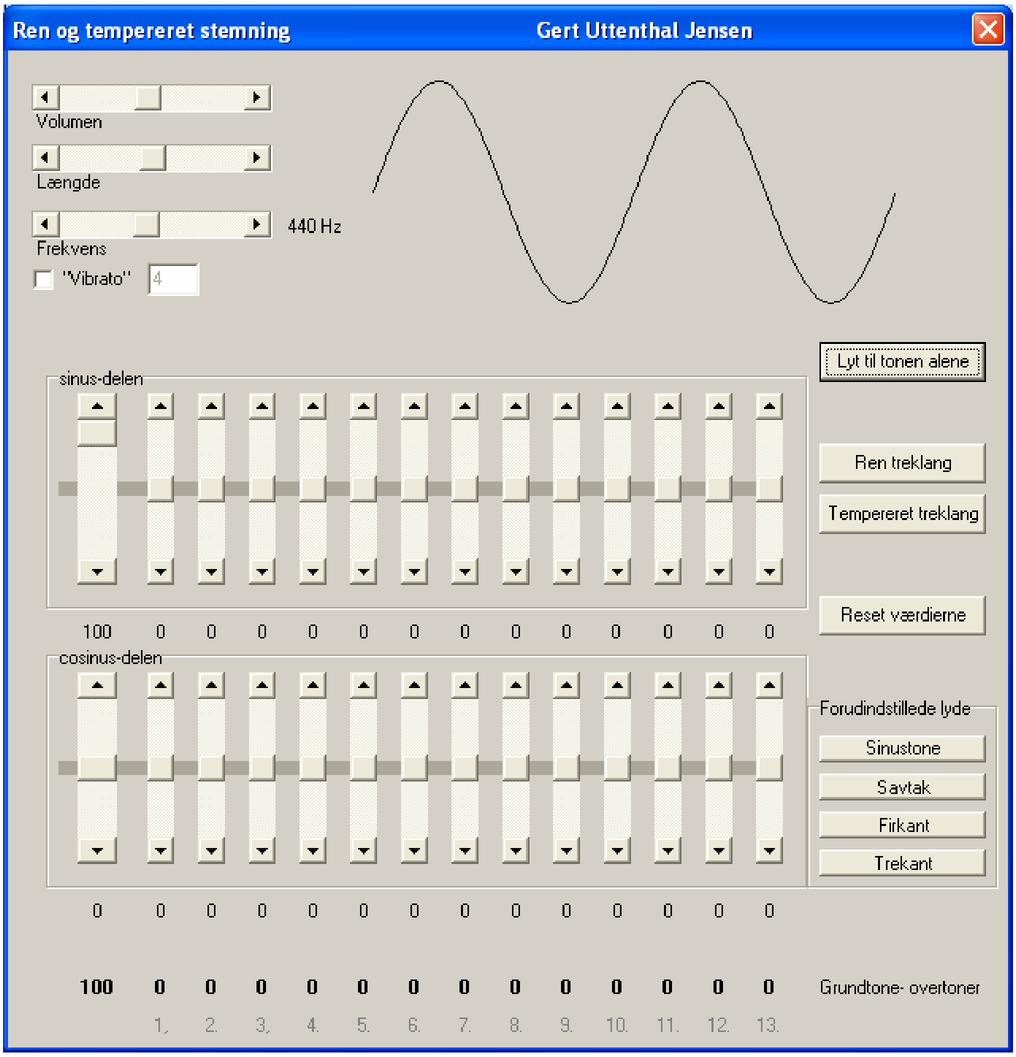
c	e	g
261.5		

Ligesvævende treklang

c	e	g
261.5		

Kan vi høre denne forskel?

Åben den tonegenerator der hedder **overtoner.** Den kan du hente på
http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/overtoner/overtoner.exe



På knapperne **Ren treklang** og **Tempereret treklang** (=ligesvævende tre-klang) kan du høre hvordan de lyder.

Det er muligt du skal høre det i høretelefoner. Hvordan hører vi forskel?

Prøv at ændre på **frekvensen** for grundtonen på skyderen øverst til ven-stre. Hvordan ændres den tempererede treklang?

På alle de skydere kan du tilføje overtoner til den grundtone du har. Prøv at ændre på tonens klang. Du kan høre grundtonen på knappen **Lyt til tonen alene**.

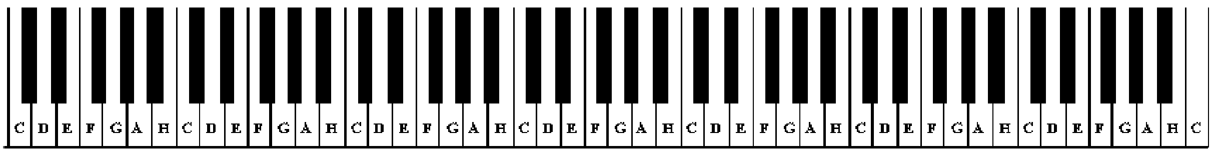
Hvorfor benytter vi ikke bare rene intervaller?

Svartet er ganske kort: Vi bruger ikke rene intervaller fordi de ikke passer samme.

Konflikten mellem den rene kvint og oktaven – det Pytagoræiske komma:
Hvis vi starter ved nederste tone c og springer opad i kvinter, så varer det 12 kvinter inden vi når tilbage til c igen. Prøv at tegne springene ind på klaveret nedenfor. Når vi går tolv kvinter op så svarer det til at gange med 3/2 tolv gange.

Vi ganger altså med

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \qquad \frac{531441}{4096}$$



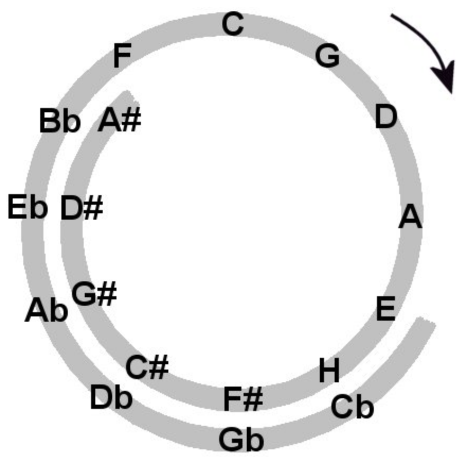
Men ser vi på hvor mange oktaver vi er gået op, så er vi kun gået 7 oktaver op og det svarer til at frekvensen er ganget med 2 syv gange**.** Vi har altså ganget med $2^7 = 128$

Forholdet mellem disse kaldes *det Pytagoræiske komma*

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} \qquad \frac{531441}{524288}$$

Hvis vi ikke får fjernet dette fx ved at fordele det lidt, så vil kvintcirklens to ender aldrig møde hinanden. Så betyder det at vi stemmer en tangent i fx *es* og så kan vi ikke spille et *dis*. Og gør vi det alligevel så lyder det altså (i nogle tonearter) rigtig dårligt.

Bemærk i øvrigt at kvinterne er for store i forhold til oktaven. Vi skal altså *sænke* kvinterne, for at få enderne til at mødes.



Konflikten mellem den rene kvint og den rene storterts – Det Synotiske komma"

Hvis vi går fire kvinter op fra tonen *c* så er vi nået til tonen *e* to oktaver over.

Frekvensforholdet mellem disse er

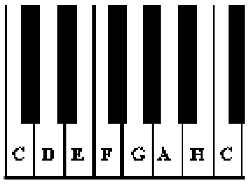
$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\frac{5}{4}\cdot 2^2} \qquad \frac{81}{80}$$

De tre kvinter er altså større, og hvis vi skal have "harmoniseret" kvinter og store tertser, så skal vi altså sænke (nogle af) kvinterne eller hæve tertserne.

Konflikten mellem den rene terts og oktaven

Hvad sker der hvis vi stabler rene tertser ovenpå hinanden? Hvis vi starter i c og går store tertser op så kommer vi til e og derefter til tangenten mellem g og a inden vi når tangenten c en oktav over.

Tegn springene ind på klaverituret og kontroller at det er store tertser (vi går 4 tangenter frem ved en stor terts)



Tre store tertser svarer til at gange med 5/4 3 gange og hvis det skulle passe med en oktav skulle det være lig med 2.

Men tre rene stor-tertser svarer til at gange med

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \qquad \frac{125}{64}$$

og dette er mindre end en oktav.

$$\frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} \qquad \frac{128}{125}$$

Vi skal altså hæve de store tertser for at få dem til at passe med oktaven, med mindre at vi gerne vil have store tertser i forskellige størrelser. Det vil vi få i næsten alle stemninger, selvom forskellen langsomt bliver mindre.

Den Pytagoræiske stemning

Den Pytagoræiske stemning eller det Pytagoræiske tonestystem finder vi hos Euclid i 3. århundrede f. Kr. En legende knytter det til Pytagoras (5. årh. f.Kr), men der er ikke håndfast belæg for denne antagelse. Via den senantikke filosof, statsmand og musikteoretiker Boëtius (480-524) overføres det Pytagoræiske tonesystem til den Europæiske middelalder. Her bruges det indtil omkring 1500, hvor andre stemninger begynder at dukke op.

I den Pytagoræiske stemning tager man udgangspunkt i at alle kvinter skal være rene, altså at de svarer til et frekvensforhold på 3/2

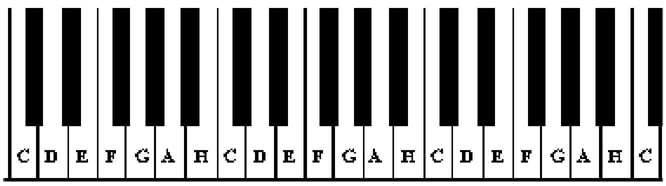
Eb Bb F C G D A E H F# C# G#

Ren kvint

Brug dette til at regne alle frekvenserne ud (med en decimal). Husk at du går en kvint op ved at gange med 3/2, du går en kvint ned ved at dividere med 3/2, og du går en oktav ned ved at dividere frekvensen med 2.

C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			



Hvor godt klinger den Pytagoræiske stemning når vi tager en G-dur treklang eller en F# treklang?

Vi udregner først forholdet mellem frekvensen for grundtonen og tertsen *i akkorden* , og derefter forholdet mellem grundtonen og kvinten. Dette gør vi ud det skema I har udfyldt på siden før.

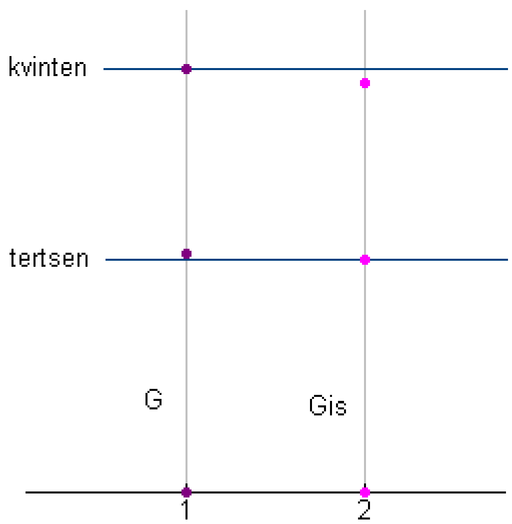
	$\frac{Frekvens_{Grundtone}}{Frekvens_{Grundtone}}$	$\frac{Frekvens_{Terts}}{Frekvens_{Grundtone}}$	$\frac{Frekvens_{Kvint}}{Frekvens_{Grundtone}}$
G (g – h – d)	1	1.2556	1.5
G# (gis-his/c-dis/es)	1	1.2486	1.4798

Lad os definere Listerne

Lg := { 1 , 1.2556 , 1.5 }

Lgis := { 1 , 1.2486 , 1.4798 }

Tegner vi dem nu logaritmen af disse lister ind i et graf program kan det komme til at se således ud:



De vandrette linier er y = log(5/4) og y = log(3/2) som angiver hvor den rene og "pæne" treklang ligger.

Her ser vi at tertsen i den Pytagoræiske stemning er for høj i G-dur mens at kvinten er alt for lav i Gis. Det sidste er så slemt at vi tydeligt kan høre at det ikke lyder godt.

op mod vores "ideal-liste"

Lren := { 1 , 5/4 , 3/2 }

Opgave:
1) Udregn frekvensforholdet mellem c-e og c-g
2) Udregn frekvensforholdet mellem h-dis og h-fis

Illustrer det grafisk.

Opgave:
Åben tonegeneratoren **Stemning2** på

http://www.frborg-gymhf.dk/gj/lyd/stemning/Stemning2.exe

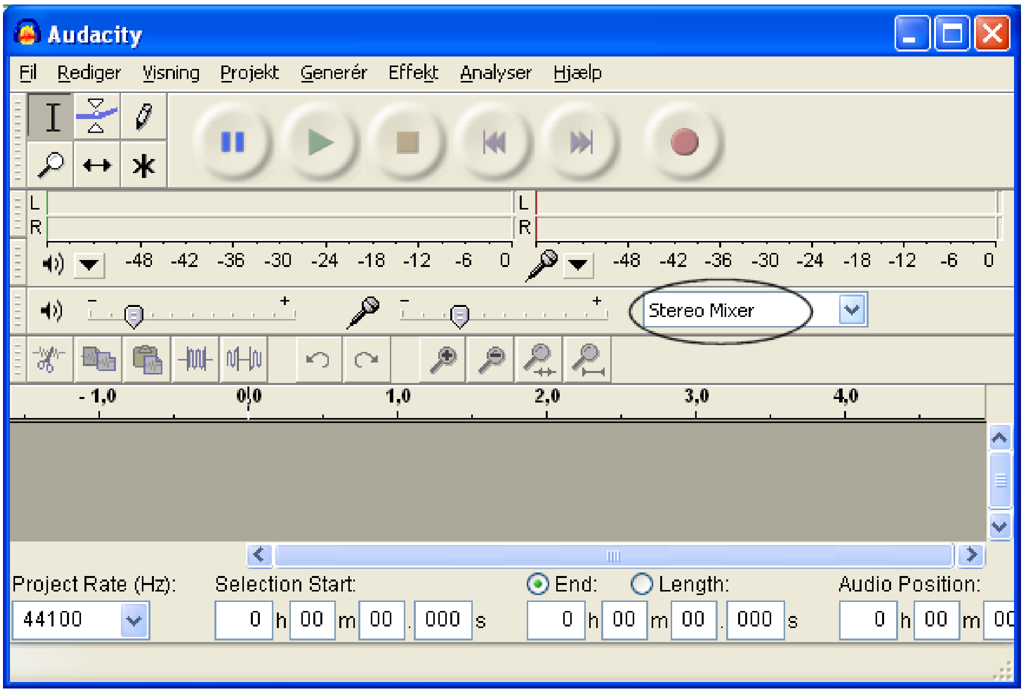
Indskriv frekvenserne. Der hvor der står **Min Skala 1** skriver du i stedet **Pytagoræisk** og trykker på **Gem stemning 1**. Nu er denne stemning gem så længe programmet er åbent. Den forsvinder når du lukker det.

Tryk på **Treklang** og og hør en C-dur treklang.

Klik nu på den scrollbar, der hedder **Transponer melodien**. Hvis der står **C# / Db** så er det den treklang du hører når du trykker på treklang.

Hør hvordan de forskellige treklange lyder. Find mindst en treklang der lyder dårligt. Du kan også benytte den knap der hedder **kadence**.

Start evt programmet **Audacity** og optag lydene som wav-filer. Husk at Audacity skal stå på **StereoMixer** for at optage lydene fra PC'en selv.



[Audacity hentes på http://audacity.sourceforge.net]

Prøv om du kan forklare hvorfor de lyder dårligt.

Opgave
I den Pytagoræiske stemning er akkorden Gis speciel fordi den ligger lige, der hvor "hullet" på kvintcirklen er.

Vi kan lytte til den klang vi før regnede ud til

Lgis := { 1 , 1.2486 , 1.4798 }

og sammenligne med den rene

Lren := { 1 , 5/4 , 3/2 }

I den Pytagoræiske stemning er frekvensen for Gis 417.7 Hz. Frekvenserne er altså

G# i Pytagoræisk stemning

$$417.7 \cdot \{1, 1.2486, 1.4798\} \qquad \{417.7, 521.54, 618.112\}$$

G# med rene kvinter og tertser

$$417.7 \cdot \{1, 1.25, 1.5\} \qquad \{417.7, 522.125, 626.55\}$$

Det letteste er at åbne **Stemning2** og skrive dem ind som tonerne C – E og G i de stemninger du kan definere selv. Husk at gem dem. Så kan du høre dem som C-dur klange i de to stemninger

Opgave:
Angiv frekvensforholdet som en brøk. Vi ved at kvinterne fra es til gis er re-ne. Derfor er g 3/2 i forhold til grundtonen.

Tonen d ligger en kvint over g og det svarer altså til 3/2*3/2 men da vi nu er kommet mere end en oktav op lægger vi den samtidig en oktav ned så frekvensforholdet i forhold til C bliver

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Fortsæt selv

C	D	E	F	G	A	H	C
1	9 / 8			3 / 2			2

Grafisk fremstilling:
Hvis vi definerer en liste af disse koificienter som

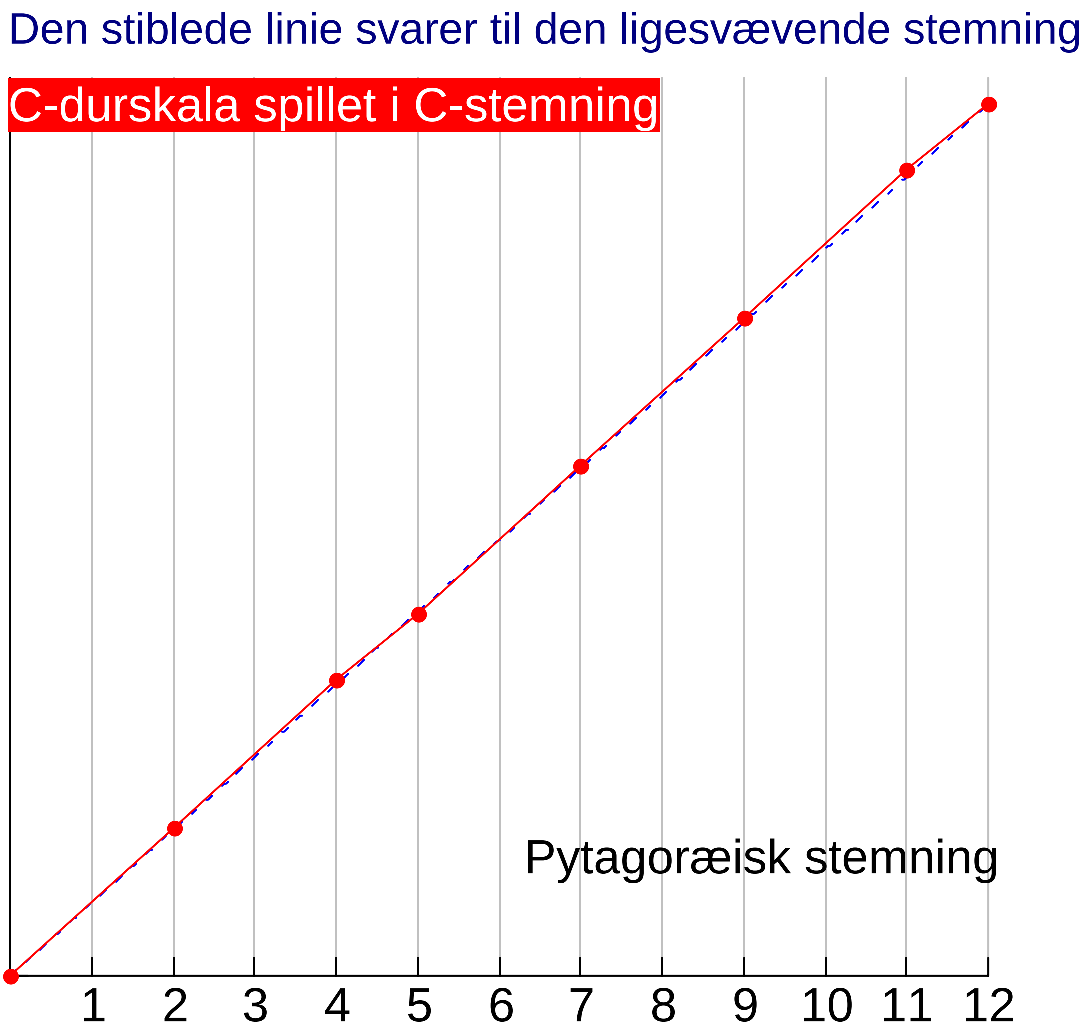
$Pytc := \{1, \frac{9}{8}, ..., 2\}$ og $L := \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12\}$

Så kan vi afbilde log(*Pytc*) mod L

Hvis du i samme koordinatsystem tegner

$$f(x) = x \cdot \frac{\log(2)}{12}$$

kan du se hvor den pytagoræiske stemning afviger fra den ligesvævende. Hvorfor vil f(x) svare til den ligesvævende?



Hvor god er den pytagoræiske stemning til at spille i tonearter der ligger langt væk fra C-dur, der hvor de to ender af kvintcirklen når sammen?

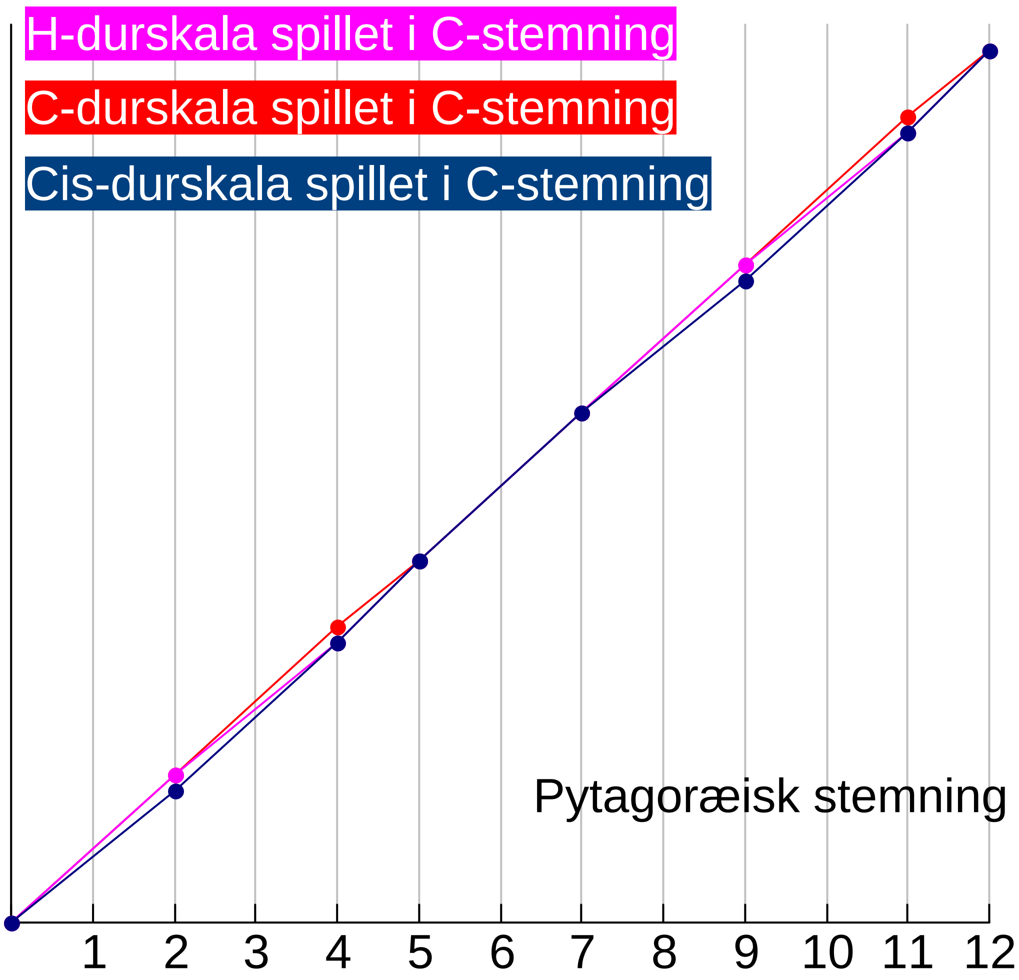
Prøv at beregne frekvensforholdet mellem grundtonen C# og de forskellige trin i skalaen. Du kan benytte de frekvenser, du udregnede i starten af afsnittet om den rene stemning:

C#	**D#**	**E#=F**	**F#**	**G#**	**A#**	**H#=C**	**C#**
1							**2**

Prøv også at beregne frekvensforholdet mellem grundtonen H og de forskellige trin i skalaen, hvis vi spiller i H-dur. Du kan benytte de frekvenser, du udregnede i starten af afsnittet om den rene stemning:

H	**C#**	**D#**	**E**	**F#**	**G#**	**A#**	**H**
1							**2**

Opgave:
Hvis du definerer følgen af frekvenser for cis-dur og H-dur som listerne Pytcis, Pyth, så kan du plotte L mod log(Pytc), log(Pyth) og log(Pytcis). Derved kan du se hvor skalaen for h og cis afviger fra den Pytagoræiske c-durskala.



Vi ser at cis-dur kun passer på de to midterste og starten. H-dur passer lidt bedre men ikke meget.

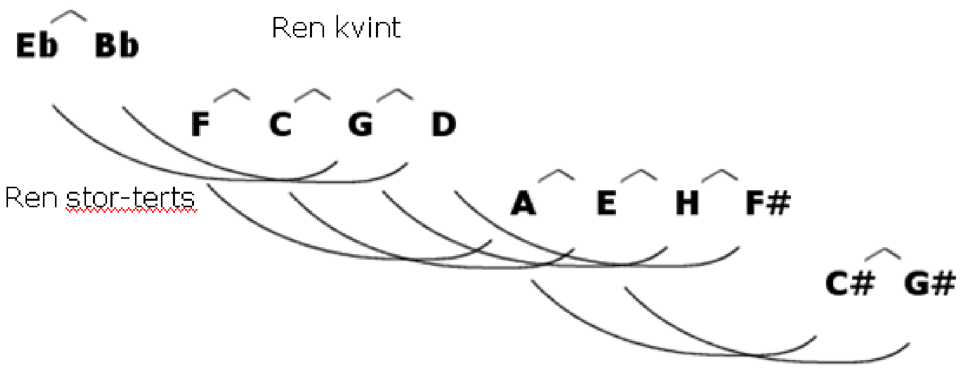
http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_tuning
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_musical_scales

Søgeord: pythagorean tuning

Den rene stemning

Omkring år 1500 møder vi de første stemninger der prøver at inddrage den rene storterts også. Det er i Ramos de Pareja's bog *Musica Practica*.

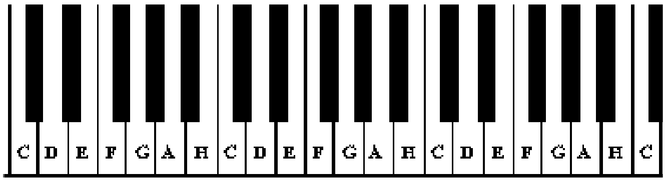
I den rene stemning stemmer man nogle af kvinterne rent men ikke alle. Systemet fremgår af følgende oversigt.



Brug dette til at regne alle frekvenserne ud (med en decimal). Husk at du går en kvint op/ned ved at gange/dividere med 3/2, du går en ren storterts op ved at gange med 4/4, og du går en oktav ned ved at dividere frekvensen med 2.

C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			



Opgave:
Angiv frekvensforholdet som en brøk. Se på sammenhængen ovenfor.

C	D	E	F	G	A	H	C
1		**5 / 4**		**3 / 2**			**2**

Opgave:

Hvad er frekvens forholdet mellem de store sekunder?

C-D:

D-E:

F-G:

G-A:

A-H:

Hvad er frekvensforholdet mellem de små sekunder?

E-F:

H-C:

Opgave:
Bestem frekvensforholdene i følgende treklange:

C – e og c – g

F – a og a – c

G – h og h – d

H – d# og h – f#

Opgave:
Åben tonegeneratoren **Stemning2** og indskriv frekvenserne. Der hvor der står **Min Skala 2** skriver du i stedet **Ren** og trykker på **Gem stemning 2**. Nu er denne stemning gem så længe programmet er åbent. Den forsvinder når du lukker det.

Tryk på **Treklang** (eller Kadence) og og hør en C-dur treklang.

Klik nu på den scrollbar, der hedder **Transponer melodien**. Hvis der står **C# / Db** så er det den treklang du hører når du trykker på treklang.

Hør hvordan de forskellige treklange lyder. Find mindst en treklang der lyder dårligt. Du kan også benytte den knap der hedder **kadence**.

Start evt programmet **Audacity** og optag lydene som wav-filer. Husk at Audacity skal stå på **StereoMixer** for at optage lydene fra PC'en selv.

Opgave:
Vi stemmer den rene stemning så klaveret lyder godt i C-dur. De centrale treklange er rene. Men hvordan lyder det når vi spiller i tonearter der er langt fra C fx H-dur og C#-dur. Vi har allerede lyttet til dem, og fundet ud af at de ikke er så gode.

Prøv at beregne frekvensforholdet mellem grundtonen C# og de forskellige trin i skalaen. Du kan benytte de frekvenser, du udregnede i starten af afsnittet om den rene stemning:

C#	D#	E	F#	G#	A#	H#=C	C#
1							2

Prøv også at beregne frekvensforholdet mellem grundtonen H og de forskellige trin i skalaen, hvis vi spiller i H-dur. Du kan benytte de frekvenser, du udregnede i starten af afsnittet om den rene stemning:

H	C#	D#	E	F#	G#	A#	H
1							2

Opgave:
Hvis du definerer følgen af frekvenser for c-dur, cis-dur og H-dur som listerne Rc, Rcis, Rh og definerer listen $L := \{0,2,4,5,7,9,11,12\}$, så kan du plotte L mod log(Rc), log(Rh) og log(Rcis). Derved kan du se hvor skalaen for h og cis afviger fra den rene c-durskala.

Du kan også afbilde L mod log(Lc) sammen med funktionen

$$f(x) = x \cdot \frac{\log(2)}{12}$$

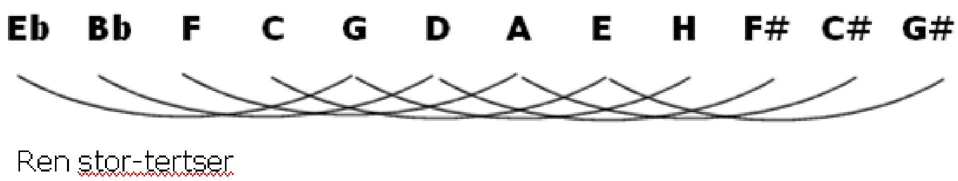
Og se hvor den rene stemning afviger fra den ligesvævende. Hvorfor vil f(x) svare til den ligesvævende?

http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_musical_scales
http://en.wikipedia.org/wiki/Just_intonation

Søgeord: just intonation

Den Prætorianske stemning

En af de første stemninger der dropper de rene kvinter er den Prætorianske stemning. Her går man ud fra at alle kvinter er lige store, men ikke så store som rene tertser. I stedet går man ud fra at alle stortertserne er rene

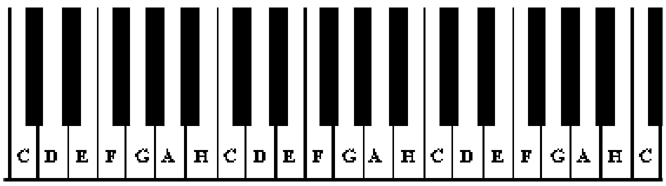


Brug dette til at regne alle frekvenserne ud (med en decimal). Husk at du går en kvint op/ned ved at gange/dividere med 3/2, du går en ren storterts op ved at gange med 4/4, og du går en oktav ned ved at dividere frekvensen med 2.

Hovsa! I første omgang kan du kun regne to af frekvenserne ud. Hvilke?

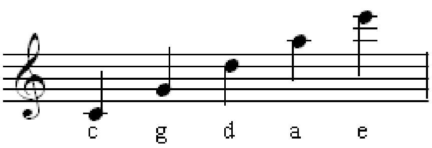
C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			



Vi vil gerne regne ud hvad det er for en faktor vi skal gange på for at gå den kvint vi skal bruge her. Vi ved at den er for lille og vi ved at det er den samme hele vejen, men vi ved ikke hvor meget mindre end 1.5 den er.

Lad os sige at hver gang vi går en kvint frem så ganger vi med tallet *k*.



Her er vi gået 4 kvinter op og dermed har vi ganget *k* på 4 gange. Samtidig er vi gået to oktaver og en ren storterts op, og det svarer til at gange med 2 og 2 og 5/4 dvs

$$k^4 = 2 \cdot 2 \cdot \tfrac{5}{4} = 5 \Leftrightarrow k = \sqrt[4]{5} = 1.49535$$

Det er altså den faktor vi skal gange med for at springe en kvint frem. Brug det til at finde resten af frekvenserne.

Opgave:
Bestem frekvensforholdene i følgende treklange:

C – e og c – g

F – a og a – c

H – d# og h – f#

G# – c og g# - d#

Opgave:
Åben tonegeneratoren **Stemning2** og indskriv frekvenserne. Der hvor der står **Min Skala 1** skriver du i stedet **Ren** og trykker på **Gem stemning 1**. Nu er denne stemning gem så længe programmet er åbent. Den forsvinder når du lukker det.

Tryk på **Treklang** (eller Kadence) og og hør en C-dur treklang.

Klik nu på den scrollbar, der hedder **Transponer melodien**. Hvis der står **C# / Db** så er det den treklang du hører når du trykker på treklang.

Hør hvordan de forskellige treklange lyder. Find mindst en treklang der lyder dårligt. Du kan også benytte den knap der hedder **kadence**.

Start evt programmet **Audacity** og optag lydene som wav-filer. Husk at Audacity skal stå på **StereoMixer** for at optage lydene fra PC'en selv.

Opgave:
Angiv frekvensforholdet i en almindelig c-durskala eksakt. Det er ikke så let. Husk at alle store tertser er rene – svarende til forholdet 5/4. Husk at alle kvinten (dog ikke "kvinten gis-es) er ens, og at deres frekvensforhold er $k = \sqrt[4]{5}$ (beregnet ovenfor).

C	D	E	F	G	A	H	C
1		5 / 4		$\sqrt[4]{5}$			2

Vis at alle de store sekunder nu er ens. Sammenlign med den rene stemning.

Den prætorianske stemning minder om den ligesvævende. Vi gør alle kvinter lige store. Men i den Prætorianske stemning "glemmer" vi bare "kvinten" mellem es og gis. Den regnes ud fra de rene stortertser.

I den Prætorianske stemning er det "kommaet" mellem kvinterne f-c-g-d-a som burde være 81/64, men som kun er 5/4 = 80/64 – det såkaldte *syntoniske komma"* der delse ud i fire. Stemningen kaldes derfor nogle steder 1/4komma-middeltone temperatur, men normalt bruges dette dog om stemninger hvor det er det *Pytagoræiske komma* (forskellen på kvinter og oktaver) der delses i 4 (fx Werckmeister_I og III som vi ser senere)

Søge ord: Meantone intonation (bruges generelt om stemninger med et element af temperament).
Se Gads musikleksikon (Kbh 2003): Tonesystem
http://en.wikipedia.org/wiki/Musical_temperament
http://en.wikipedia.org/wiki/Meantone_temperament

Den ligesvævende stemning

Fra 1600-tallet breder den ligesvævende stemning sig. Det er den vi kender i dag. Her er kvinterne ens. De er alle sammen gjort mindre så de ikke er rene, men de er lige "falske".

Eb Bb F C G D A E H F# C# G#

Tempererede kvinter

Men inden vi regner kvinterne ud bestemmer vi den lille sekund. Vi deler oktaven op i 12 lige lange intervaller. Det svarer til at vi ganger med det samme tal 12 gange inden vi er nået en oktav op:

$$k^{12} = 2 \Leftrightarrow k = \sqrt[12]{2} = 1.05946$$

Benyt dette til at bestemme de øvrige frekvenser

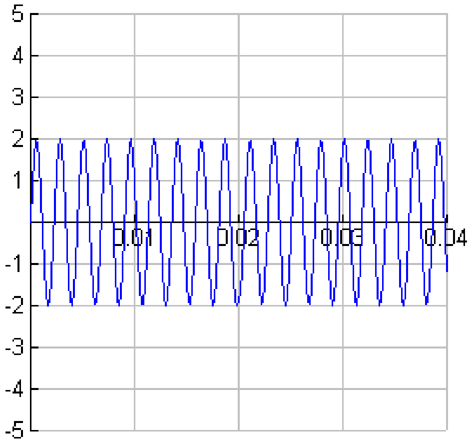
C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			

http://en.wikipedia.org/wiki/Equal_temperament
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_musical_scales
http://en.wikipedia.org/wiki/Meantone_temperament

Søgeord: Equal tuning, equal temprament

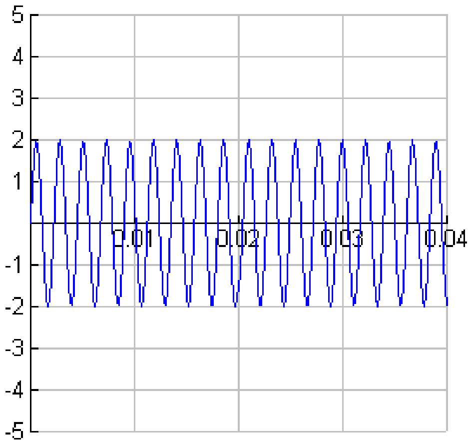
Svævning.



Hvis to toner ligger meget tæt på hinanden opstår et interessant akustisk og matematisk fænomen der kaldes *svævning*.

På den øverste figur ses en svingning på 440 Hz (kammertonen – a).

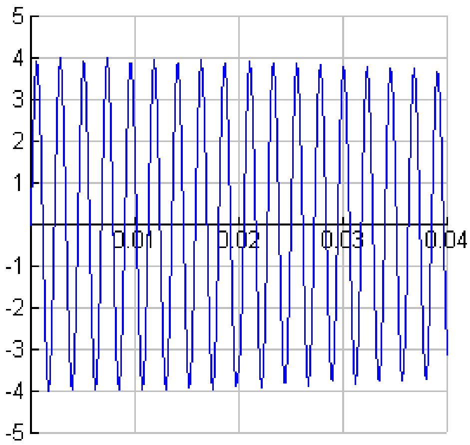
Vi ser at vi på det første 0.01 sek gennemløber ca. 4.5 svingninger.

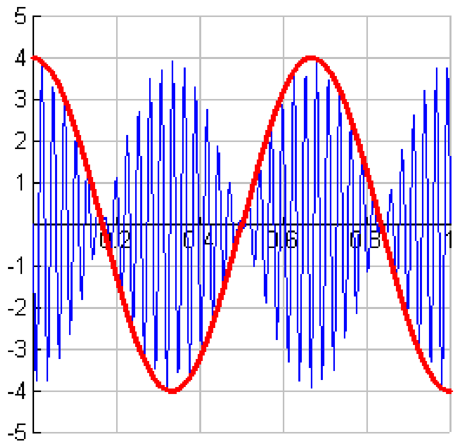


Hvis vi oven I denne lægger tonen på 443 Hz – altså en tonen der er næsten magen til bare lidt højere – så sker der noget spændende.

På figuren her ses tonen på 443 Hz. Bemærk at vi stadig har ca 4.5 svingninger på 0.01 sekund.

Nedenfor ses hvad der sker når de spilles samtidig. På den venstre graf er der beholdt de samme enheder. Vi ser at amplituden er dobbelt så stor som før, og vi ser at der stadigvæk er omkring 4.5 svingninger på det første 1/100-del sekund. Det er altså samme tone som før, men dobbelt så kraftig. Samtidig bemærker vi at der sker lidt med udsvinget … det er som om det langsomt falder.





På den højre graf har vi ændret enheden så vi her ser hvad der sker I løbet af et sekund. Vi ser hvordan amplituden svinger mellem 4 og 0. Vi vil høre tonen I stød – her 3 gange pr sekund. Amplituden følger en cosinus-funktion med svingningstiden 2/3 sekund og dermed en frekvens på 1.5 Hz. Vi vil høre *en* tone der støder *tre* gange i sekundet, når forskellen er 3 Hz.

Den matematiske forklaring af dette finder vi I de såkaldt logaritmiske formler for cosinus og sinus:

$$\sin(x)+\sin(y)=2\cdot\cos(\frac{(x-y)}{2})\cdot\sin(\frac{(x+y)}{2})$$

I en let omformuleret udgave der direkte kan omsættes til et mere musiknært sprog får vi:

$$\sin(x\cdot 2\pi)+\sin(y\cdot 2\pi)=2\cdot\underbrace{\cos(\frac{(x-y)}{2}\cdot 2\pi)}_{\text{Amplituden}}\cdot\underbrace{\sin(\frac{(x+y)}{2}\cdot 2\pi)}_{\text{Tonehøjden}}$$

Formlen siger at hvis vi lægger en svingning på x Hz oveni en svingning på y Hz så vil vi få en hurtig svingning på den gennemsnitlige frekvens

$$\frac{(x+y)}{2}Hz$$

men med en amplitude der langsomt svinger op og ned med en frekvens på halvdelen af forskellen på de to frekvenser:

$$\frac{(x-y)}{2}Hz$$

Da en sådan svingning har to "toppe" vil det høres som (x-y) stød pr sekund på den "fælles" tone.

Teknikken bruges til at stemme f.eks. guitarer og el-basser. Her slå man de to strenge an, men lytter ikke så meget efter om tonerne er ens, men i stedet om man kan gøre svævningen mellem de to toner så langsom, at den ikke kan høres.

Men teknikken bruges også af klaverstemmere, når de skal sikre sig at en kvint er "falsk på den rigtige måde". Det skal vi se nærmere på.

Hvordan stemmer vi en ”Kvart-komma-formindsket” kvint?

I den Prætorianske stemning tager vi udgangspunkt i at de store tertser er rene og så tilpasser vi *alle* kvinterne så de bliver formindsket lige meget. I den rene stemning har vi mange rene kvinter og få af de såkaldte ”komma-formindskede” kvinter. I den Prætorianske stemning fordeles dette ”komma” ud på alle kvinter.

Men den rene kvint svarer til frekvensforholdet 1.5 så svarer den kvart-komma-formindskede kvint til frekvensforholdet $k = \sqrt[4]{5}$ =1.49535

Hvis vi har en tone A på 440Hz og oktaven under på 220Hz. Midt imellem har vi tonen D, der altså gerne skulle stemmes med frekvensen 440/1.49535 = 294.25 Hz

Hvilke toner og overtoner vil støde sammen her? Bestem hver tones overtoner og find den laveste overtone/tone der støder sammen? Husk at en stødtone vil støde med en frekvens, der er forskellen på de to toners frekvens. Hvis der altså er 0.5 frekvens forskel så vil den støde ½ gang pr sekund dvs hvert andet sekund.

	a	d	a
Grundtone	220	294.25	440
1. overtone			
2. overtone			
3. overtone			
4. overtone			
5. overtone			
6. overtone			

Hvilke toner vil støde sammen?

Med hvilken frekvens?

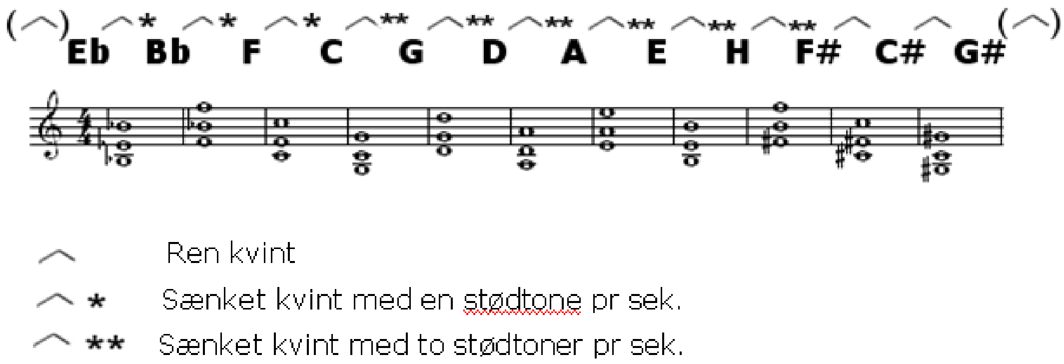
Hvad ville der ske med stødfrekvensen hvis vi valgte de tre toner en oktav under?

”Wohltemperierte Clavier” og Bach-stemning

> *"Certain people believe that they can find the preceding accord of the equal semitones by beginning ut [c], re [d] , mi[e] , fa [f] etc. on each key of the spinet, or by the number of tremblings or beats which the fifth and other tempered consonances make: for example, the fifth beats once in each second when it is tempered as it should be (as much for the organ as for the spinet); whereas when it is just it does not beat at all"*
>
> **- Marin Mersenne (Paris, 1636)**

Den stemning som Johan Sebastian Bach brugte til at skrive bl.a. ”Wohltemperierte Clavier” var ikke den ligesvævende stemning vi kender i dag.

Det var en stemning hvor enkelte kvinter var rene men hvor andre var sænket i forhold til antal stødtoner. Da antal stødtoner jo afhænger af i hvilken oktav vi tager et interval skal vi være mere præcise nu.



Og hele koden til dette sindrige system finder vi allerede på titel-bladet for samlingen.

Hvis vi ser på antal stødtoner når vi stemmer fra tonen C og går mod venstre så har vi tonerne C – F – Bb – Eb/D# – G# - C# osv.

Det antal stødtoner vi skal have i dette system er

1 – 1 – 1 – 0 – 0 – 0 – 2 - 2 – 2 – 2 – 2

Så er vi startet ved tonen c og sluttet ved tonen g. Vi kunne have fortsat med endnu et 2 tal og så var vi tilbage ved tonen c igen.

Vi har set på hvordan stødtoner i en klang af typen

skyldes sammenstød mellem 2. overtone i den midterste og 1. overtone i øverste tone. Vi har også set at der vil være 3 stød for hver Hz tonen d er skæv i forhold til den rene kvart/kvint.

Ud fra tonen *a* bestemmer vi altså tonen *d*. Dvs vi stemmer i *kvarter* i stedet for at stemme i *kvinter*. Vi bevæger os altså baglæns rundt i kvintcirklen.

Da kvinterne skal sænkes så betyder det at kvarterne skal hæves. Husk at den rene kvart svarer til talforholder 4/3.

Når vi ovenfor har 1 eller 2 stødtoner svarer det til at kvarten er en ren kvart der er hævet 1/3 eller 2/3 Hz.

På Bachs tid stemte man som regel med et C på 249Hz.

Husk at vi skal bestemme tonerne inden for oktaven 249Hz – 498Hz.

Den første tangent vi bestemmer er altså f. Den rene kvart giver

$$4/3 \cdot 249 = 332 \text{ Hz}$$

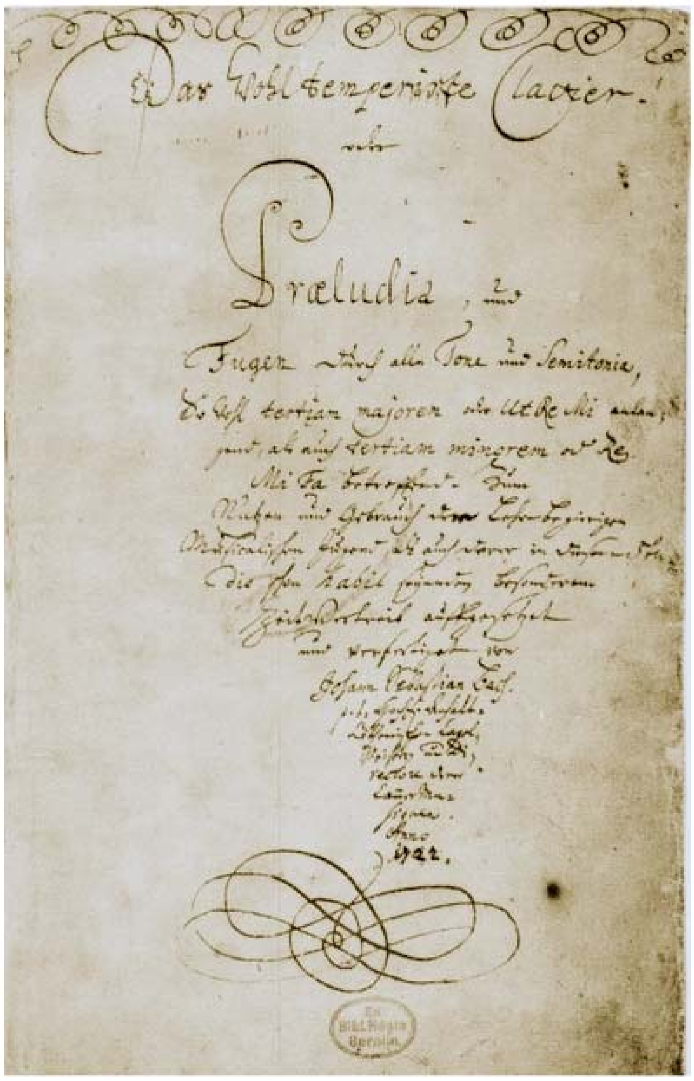
Da denne kvart skal hæves med 1/3 Hz (fordi der mellem F og C kun skal være en stødtone) bliver frekvensen for tonen f

$$4/3 \cdot 249 + 1/3 = 332.33 \text{ Hz}$$

Den anden tangent vi bestemmer er Bb. Den rene kvart giver

$$4/3 \cdot 332.33 = 443.11 \text{ Hz}$$

Da denne kvart også skal hæves med 1/3 Hz (fordi der mellem Bb og F kun skal være en stødtone) bliver frekvensen for tonen Bb



Das Wohltemperirte Clavier.
oder
Præludia, und
Fugen durch alle Tone und Semitonia,
So wohl tertiam majorem oder Ut Re Mi anlangend,
als auch tertiam minorem oder Re Mi Fa betreffend.
Anno 1722.

$$4/3 \cdot 332.33 + 0.33 = 443.44 \text{ Hz}$$

Den tredie tangent vi bestemmer er Eb. Den rene kvart giver

$$4/3 \cdot 443.44 = 591.26 \text{ Hz}$$

Denne tone er oppe i oktaven over 249-498Hz og vi skal derfor dividere med 2 inden vi igen hæver med 1/3 Hz (fordi der mellem Bb og Eb kun skal være en stødtone) bliver frekvensen for tonen eb

$$591.26/2 + 0.33 = 295.96 \text{ Hz}$$

De næste tre kvarter skal ikke hæves fordi der ikke er markeret nogle stødtoner i skemaet. Udfyld selv resten af skemaet og se hvor godt det sidste c bliver. Det skal ligge på enten 249Hz eller 498Hz alt efter om det er det nederste c i skalaen eller c'et en oktav over.

	Den rene kvart	Skal den oktaveres ned?	Hvor meget skal kvarten hæves? (stødtoner)	Hvad bliver frekvensen
c				249 Hz
f	332	-	0.33	332.33
Bb	443.11	-	0.33	443.44
Eb	591.26	295.63	0.33	295.96
gis	394.62	-	0	394.62
Cis				
Fis				
H				
E				
A				
D				
G				
c				

Du er velkommen til at skrive stemningen ind i tonegeneratoren, men denne og de efterfølgende lyder så meget som den ligesvævende stemning, at vi ikke kan høre forskel i den enkle tonegenerator vi benytter her.

http://bach.tuning.googlepages.com/
http://www.bach-cantatas.com/Articles/Das_Wohltemperirte_Clavier.htm

søgeord: bach tuning

Werckmeister-I. En anden Bach-stemning

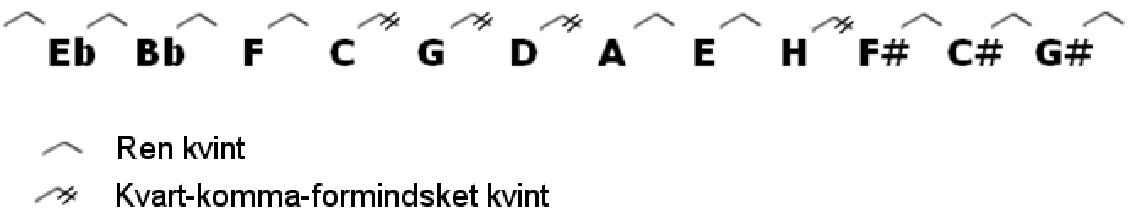

Musicalische Temperatur, Oder deutlicher und warer Mathematischer Unterricht/ Wie man durch Anweisung des MONOCHORDI Ein Clavier / sonderlich die Orgel-Wercke/ Positive, Regale, Spinetten/ und dergleichen wol temperirt stimmen könne/ damit nach heutiger manier alle Modi ficti in einer angenehm- und erträglichen Harmonia mögen genommen werden/

Andreas Werkmeister (1645-1706) er en tysk organist og musikteoretiker, der udvikler en lang række stemninger. Hans stemning ”Werkmeister I” betragter han selv som særlig velegnet til at spille kromatisk musik. Han har andre stemninger der er særlig gode til diatonisk musik.

Den går også nogle gange under navnet Werckmeister-III, men det er der også en anden der gør!, som vi skal se på om lidt.

http://en.wikipedia.org/wiki/Werckmeister_temperament

Udgangspunktet er at de fleste kvinter er rene, men at fire af dem er formindskede, så kvinterne passer hele vejen rundt i kvintcirklen.



Da ”fejlen” er fordelt på fire lige store kvinter kan vi sætte deres frekvensforhold til k. For at bestemme k siger vi som da vi påviste konflikten mellem rene kvinter og oktaver:

Hvis vi går 12 kvinter op så har vi HER ganget med

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^8 \cdot k^4$$

fordi de 8 kvinter er rene og de 4 er sænkede lige meget

Hvis vi går 7 oktaver op, så kommer vi til samme tone, hvis ”enderne mødes” i kvintcirklen. Her er frekvensen ganget med

$$2^7$$

Dermed besrmmer vi k som løsning til

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^8 \cdot k^4 = 2^7 \Leftrightarrow k = \tfrac{8}{9}\sqrt[4]{8}$$

På næste side står en tabel over hvordan frekvensforholdet bliver. Forklar hvordan vi kommer frem til tallene.

Note	Exact frequency relation
C	$\frac{1}{1}$
C#	$\frac{256}{243}$
D	$\frac{64}{81}\sqrt{2}$
D#	$\frac{32}{27}$
E	$\frac{256}{243}\sqrt[4]{2}$
F	$\frac{4}{3}$
F#	$\frac{1024}{729}$
G	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{8}$
G#	$\frac{128}{81}$
A	$\frac{1024}{729}\sqrt[4]{2}$
Bb	$\frac{16}{9}$
B	$\frac{128}{81}\sqrt[4]{2}$

Benyt dette til at bestemme frekvenserne, hvis vi stemmer A i 440 Hz

C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			

Hvor meget ændrer skalaen sig når vi skifter toneart?

Hvor ”rent” lyder udvalgte treklange.

http://en.wikipedia.org/wiki/Meantone_temperament
http://en.wikipedia.org/wiki/Quarter-comma_meantone

Werckmeister III – endnu en anden Bach-stemning

Note	Exact frequency relation
C	$\frac{1}{1}$
C#	$\frac{8}{9}\sqrt[4]{2}$
D	$\frac{9}{8}$
D#	$\sqrt[4]{2}$
E	$\frac{8}{9}\sqrt{2}$
F	$\frac{9}{8}\sqrt[4]{2}$
F#	$\sqrt{2}$
G	$\frac{3}{2}$
G#	$\frac{128}{81}$
A	$\sqrt[4]{8}$
Bb	$\frac{3}{\sqrt[4]{8}}$
B	$\frac{4}{3}\sqrt{2}$

5 kvinter sænket med det k vi beregnede på sidste side mens en kvint er HÆVET med samme k-værdi. Frekvens-forholdet fremgår af listen nedenfor. Forklar hvordan vi kommer frem til dem.

Du behøver ikke at kende frekvensforholdet for den kvart-komma-HÆVEDE kvint. Hvis du starter med c og regner op til gis og derefter starter fra C og regner hen til Es så bliver "kvinten" mellem gis og es automatisk hævet med et "kvart komma".

De kvinter der er rene svarer til frekvensforholdet 3/2 mens de der er kvart-komma-formindskede svarer til et frekvens-forhold på

$$k = \tfrac{8}{9}\sqrt[4]{8}$$

.... Evidence has been mounting that Johann Sebastian composed all his works in Andreas Werckmeister's preferred chromatic temperament III tuning (published in 1681 throughout Germany). This temperament served as the standard organ temperament in all the major Bach cities. The Arnstadt organ, built by master organ builder Wender, was proscribed for Werckmeister tuning according to a description of Wender's preferences given by Leipzig's Kuhnau. The Muhlhausen organ, again built by Wender, was tuned by Bach's predecessor, Ahle, a personal friend of Werckmeister's. Buxtehude, another of Werckmeister's good friends, was a strong advocate for this tuning in Lübeck. In addition, Bach's cousin Walther studied with Werckmeister in Halberstadt and praised this master in his 1732 Musikalisches Lexikon, the first German language encyclopedia of music
http://www.afmm.org/PitchCD/early.html

Benyt dette til at bestemme frekvenserne, hvis vi stemmer A i 440 Hz

C	C#	D	Eb	E	F	F#

G	G#	A	Bb	H	C
		440			

Hvor meget anderledes lyder det I andre tonearter?

Cent-værdier

Man angiver nogle gange i stedet for frekvensforholdet i forhold til så en stemnings cent-værdier.

Cent-værdien udregnes som følgende størrelse, hvor x angiver frekvensforholdet

$1200 \cdot \log_2(x)$ eller $1200 \cdot \frac{\log(x)}{\log(2)}$

Derved får vi skalaen beskrevet ved en række tal der for den ligesvævende stemning bliver 0,200,400,500,700,900,1100,1200.

For den rene stemning har vi fx

Trin	c	d	e	f
Frekvensforhold	1	9/8	5/4	4/3
Centværdi	0	204	386	498
Afvigelse fra ligesvævende	0	4	-14	-2

Af det kan vi se at den rene stemning har et andet trin der er højere end den ligesvævende, men et 3. trin der er meget lavere. Fjerde trin er næsten det samme.

Centværdier kan bruges til at udregne de forhold vi har prøvet at illustrere grafisk i dette kompendium.

Opgave: Hvad betyder $\log_2(x)$? Forkalr hvorfor cent-værdierne for den ligesvævende skala bliver 0, 200, 400, 500, ... 1200

http://en.wikipedia.org/wiki/Cent_%28music%29

Forslag til arbejdsopgave omkring stemning.

Hver gruppe skal aflevere en rapport der sammenligner 3 stemninger. De tre stemninger skal være en fra hver søjle. Alle sammenligner altså med den ligesvævende, som er den vi bruger i dag.

A	B	C
Pytagoræiske Den Rene Den Prætorianske	”Vohltemperierte” Werckmeister-I Werckmeister-III	Den ligesvævende

Forklar hvordan de tre stemninger er bygget op.

Giv eksempler på styrker og svagheder ved de tre stemninger.

Alle konklusioner skal så vidt muligt underbygges både med lydklip fra tonegeneratorerne og med grafer og tabeller.

Tricks til TI-interactive eller andre matematik-programmer.

Du kan automatisere nogle af regneprocedurerne på følgende måde.

Når du har bestemt rækken af frekvenser kan du bestemme rækken af frekvensforhold ved at dividere med den første værdi. Her slutter vi med tonen h:

$$F := \frac{1}{249} \cdot \{249, 263.1, 279.5, 295.6, 312.9, 332.3, 350., 373, 394.6, 417.8, 443.4, 468.6\}$$

$$\left\{1, 1.05663, 1.12249, 1.18715, 1.25663, 1.33454, 1.40562, \frac{373}{249}, 1.58474, 1.67791, 1.78072, 1.88193\right\}$$

Nu indfører vi den række der svarer til næste oktav

$$F2 := 2 \cdot F$$

$$\{2., 2.11325, 2.24498, 2.3743, 2.51325, 2.66908, 2.81124, 2.99598, 3.16948, 3.35582, 3.56145, 3.76386\}$$

Og disse to lister anbringer vi i forlængelse af hinanden

$$FF := \mathrm{augment}(F, F2)$$

$$\{1., 1.05663, 1.12249, 1.18715, 1.25663, 1.33454, 1.40562, 1.49799, 1.58474, 1.67791, 1.78072, 1.88193, 2., 2.11325, 2.24498, 2.3743, 2.51325, 2.66908, 2.81124, 2.99598, 3.16948, 3.35582, 3.56145, 3.76386\}$$

Nu kan vi skrive en generel formel for en skala i en vilkårlig toneart op. Størrelsen *a* angiver hvilken plads vi starter fra

$$\mathrm{Skala}(a) := \frac{1}{P_{[1+a]}} \cdot \{P_{[1+a]}, P_{[3+a]}, P_{[5+a]}, P_{[6+a]}, P_{[8+a]}, P_{[10+a]}, P_{[12+a]}, P_{[13+a]}\}$$

"Done"

Ønsker vi en C-durskala sætter vi a=0

$\mathrm{Skala}(0)$ $\{1., 1.12249, 1.25663, 1.33454, 1.49799, 1.67791, 1.88193, 2.\}$

Ønsker vi en cis-dur-skala sættes a=1

$\mathrm{Skala}(1)$ $\{1., 1.12353, 1.26302, 1.33029, 1.49981, 1.68529, 1.89282, 2.\}$

Værdien af a kan ligge mellem 0 (C-dur) og 11 (H-dur).

Når I tegner skalaen ind kan I tegne log(Skala(0)) mod

$L := \{0, 2, 4, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $\{0., 2., 4., 5., 7., 9., 11., 12.\}$

Det betyder at de små sekunder bliver anbragt tættere end de store sekunder. Hvis skalaen er helt ligesvævende så alle store sekunder er dobbelt så store som små sekunder, så vil punkterne ligge på en linie

Tilsvarende kan du definere følgende størrelse, der giver forholdet mellem grundtone-terts -kvint i treklangen på tone nr a regnet ud fra c

$$\mathrm{Treklang}(a) := \left\{1, \frac{P_{[5+a]}}{P_{[1+a]}}, \frac{P_{[8+a]}}{P_{[1+a]}}\right\} \qquad \text{"Done"}$$

Nu kan vi få forholdet mellem tonerne i treklangen ved at ændre værdien:

For en C-treklang er frekvensforholdet

$\mathrm{Treklang}(0)$ $\{1., 1.25663, 1.49799\}$

For en Eb-treklang er frekvensforholdet

$\mathrm{Treklang}(3)$ $\{1., 1.26184, 1.5\}$

Mere information genrelt om emnet:

http://cnx.org/content/m11639/latest/
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_musical_scales
http://rooster.stanford.edu/~ben/sound/tuning.html

http://www.physicsclassroom.com/Class/sound/soundtoc.html

Gads musik-leksikon (Kbh 2003): tonesystemer

Søgeord: tuning systems, temprament