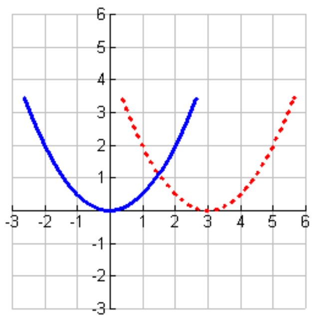
A8. Parallelforskydning af en graf

Forenklet udgave - Gert Uttenthal Jensen

Dette ark erstatter s 248-249 i TRIP



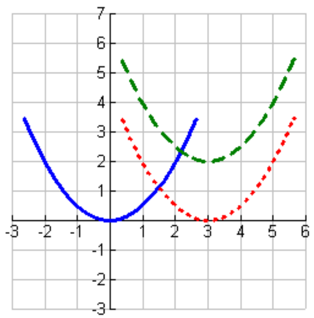
Disse to skitser illustrerer hvordan en parabel parallelforskydes.

På den fuldtoptrukne graf har vi $f(x) = ax^2$ - i dette tilfælde er a=½. Det er den graf vi vil undersøge hvordan den kan parallelforskydes.

Den prikkede graf er parallelforskudt 3 i den positive x-retning. Den må have forskriften

$$g(x) = f(x-3) \quad \text{eller} \quad g(x) = ½(x-3)^2$$

Det kan man let overbevise sig om: Den værdi f(x) antager i x=0, den antager g(x) i x=3, den værdi f(x) antager i x=2, den antager g(x) i x=2+3=5.



Kig godt på denne linie indtil du har forstået det. Du får brug for det!

> Hvis grafen for funktionen *f* forskydes stykket *v* i *x*-aksens positive retning, forekommer grafen for en funktion *g* med forskriften
>
> $$g(x) = f(x-v)$$

Den stiplede graf er parallelforskudt 2 i den positive y-retning. Den må have forskriften

$$h(x)=g(x)+2 \quad \text{eller} \quad h(x) = ½(x-3)^2 + 2$$

Det kan man let overbevise sig om idet alle y-værdierne jo er hævet med 2, når vi forskyder grafen 2 opad.

> Sætning A8.2
> Hvis grafen for funktionen *f* forskydes stykket *v* i *x*-aksens positive retning og *l* i y-aksens positive retning, forekommer grafen for en funktion *g* med forskriften
>
> $$g(x) = f(x-v)+l$$
>
> Bogstaverne *v* og *l* står for *vandret* og *lodret*

Denne sætning kan vi benytte til at vise toppunktsformlen for andengradspolynomiet:

> Sætning 28.11+28.12
> Grafen for $f(x) = ax^2 + bx + c$ kan tegnes ved at parallelforskyde parablen med ligningen ax^2 så toppunktet bliver
>
> $$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}) \quad \text{hvor} \quad d = b^2 - 4ac$$

Vi skal altså vise at

$$ax^2 + bx + c = f(x - (-\frac{b}{2a})) + (-\frac{d}{4a})$$

hvor $f(x) = ax^2$ så vil sætning A.8.2 føre direkte til Sætn 28.11+28.12

Bevis:

$$f(x - (-\frac{b}{2a})) + (-\frac{d}{4a}) = f(x + \frac{b}{2a}) - \frac{d}{4a} = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{d}{4a} =$$

$$a(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2) - \frac{d}{4a} = ax^2 + a2x\frac{b}{2a} + a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} =$$

$$ax^2 + bx + \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} = ax^2 + bx + c$$

Dermed har vi set at grafen for $ax^2 + bx + c$ fremkommer som en parallelforskydning af ax^2 i retningen

$$T = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}) \quad \text{hvor} \quad d = b^2 - 4ac$$