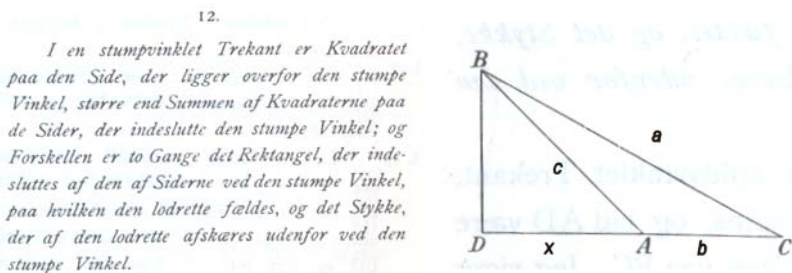


En historisk synsvinkel

– to udgaver af cosinusrelationen

Hos Euklid, der lever omkring 300 f. kr. samler datidens matematiske viden i en række bøger, der under et hedder Euklids Elementer. Disse bøger bliver en hjørnesteen i matematikundervisningen helt op til vor tid ikke mindst fordi de er eksemplarisk opbygget, med definitioner og sætninger.

Vi vil se på en af de sætninger vi finder nemlig sætning 12 i bog II og sammenligne beviset og formuleringen med den moderne udgave. Sætningen er en *geometrisk udgave af cosinusrelationen*, og den siger:



Sætningen siger altså at $a^2 > b^2 + c^2$ og at forskellen er to gange det rektangel der ”omsluttes af den af siderne ved den stump vinkel paa hvilken den lodrette fældes” (dvs siden AC, der har længden b) ...”og det stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den stump vinkel”. Det er stykket AD, som har længden x på tegningen.

Sætningen siger altså

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot x$$

I en moderne udgave af cosinusrelationen siger den tilsvarende formel: I en vilkårlig trekant gælder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

Vi vil på de næste sider se på en geometrisk udgave af Euklids bevis. Beviset er fuldstændig som Euklids bortset fra at han går mere i detaljer omkring hvorfor de forskellige omskrivninger gælder.

Om notationen:

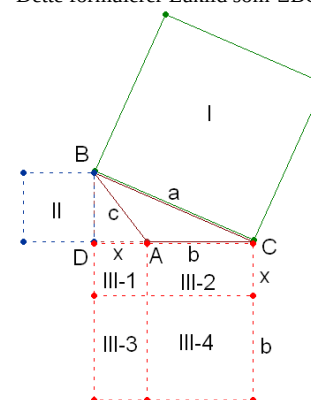
Når Euklid skriver $\square BC$ menes *arealet af et kvadrat med side BC* eller det vi ville kalde $|BC|^2$. Tilsvarende betyder $\square CA, AD$ *arealet af et rektangel med siderne CA og AD*. Det er altså ikke nødvendigvis et rektangel der er tegnet. Det er dermed det samme som tallet $|CA| \cdot |AD|$

Euklids bevis for sætning 12 i bog II

Beviset starter med at den vinkelrette nedfældes fra punktet B til et punkt, der kaldes D. Trekant ABD er retvinklet, og vi har ifølge Pythagoras at hvis romertallene repræsenterer arealerne:

$$I = II + III$$

Dette formulerer Euklid som $\square BC = \square BD + \square DC$



Hvis vi splitter kvadratet III op i 4 rektangler (se Euklids sætning II-4 næste side) får vi

$$I = II + III_1 + III_2 + III_3 + III_4 \quad \text{eller}$$

$$\square BC = \square BD + \square AD + \square AC, AD + \square AC, AD + \square BC$$

Men iflg Pythagoras er $II + III_1$ det samme som kvadratet på siden c. Desuden har vi allerede at III_4 er det samme som kvadratet på siden b.

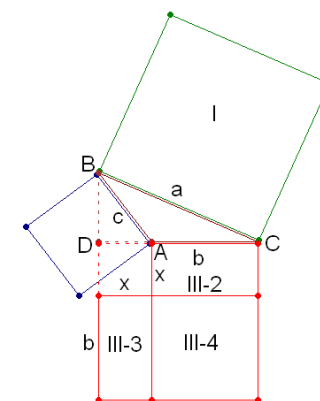
Men dermed har vi også at nedenstående kan læses på følgende måde (der er formuleret i tre forskellige ”udgaver”)

$$I = (II + III_1) + III_4 + III_2 + III_3$$

$$\square BC = \square AB + \square BC + 2 \cdot \square AC, AD$$

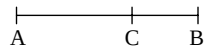
$$a^2 = c^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot x$$

Dermed har vi bevist Euklids udgave af sætningen.



Euklids sætning 4 i bog II

I sætningen ovenfor benyttede vi en opsplitning af kvadratet på siden CD. I Euklids måde at formulere sig på hedder denne sætning:



$$\square AB = \square AC + \square BC + 2 \cdot \square AC, BC$$

Kalder vi afstanden AC for x og BC for y er det den regel vi i dag vil formulere sådan:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2 \cdot x \cdot y$$

Igen ser vi hvordan vores regler for regning med tal (algebra) hos Euklid er "geometriseret". Denne type sætning kaldes faktisk *geometrisk algebra*.

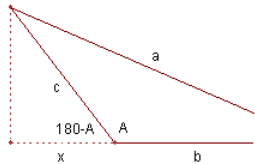
Sammenhængen mellem Euklids sætning og den nutidige udgave

Er det den samme sætning?

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot x$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

For at se det, skal vi bare indse at $x = -c \cdot \cos(A)$. Det følger af at vi har



$$x = c \cdot \cos(180 - A) = -c \cdot \cos(A)$$

Nogle vigtige forskelle på Euklids sætning og den nutidige udgave:

Euclid beviser her kun formen for det specialtilfælde at vinkel A er stumpvinklet. Han har et andet bevis for den situation at vinkel A er spids. Det er fordi han tænker i geometriske baner, i afstande og i længder, og dermed kan han ikke formulere problemet så generelt som vi gør det i den moderne formulering. I vores moderne bevis er der dog også to/tre dele, alt efter om højden falder indenfor eller udenfor grundlinjen.

I dag er vi mere vant til at tænke på Pythagoras sætning som en ligning, der siger noget om nogle talforhold.

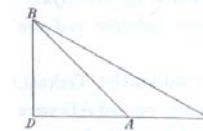
I den moderne udgave har vi også indført *trigonometriske funktioner* som sinus og cosinus til at regne på vinkler og længder.

I den moderne matematik er det at tegne og det at regne blevet forskellige sider af samme sag. Det der knytter det sammen er koordinatsystemet, der bliver indført af bla Rene Descartes (1596-1650), hvor et punkt knyttes til et koordinatsæt og geometriske former fx linier og cirkler kan knyttes til ligninger.

Euklids måde at opbygge en matematisk teori på er derimod meget moderne og grundstenen i al matematiks teoriudvikling. Han opstiller nogle definitioner og forudsætninger og ud fra dem beviser han så en lang række sætninger.

Euklids eget bevis

Lad ABC være en stumpvinklet Trekant, hvor $\angle BAC$ er stump, og lad der fra Punkt B være nedfældet BD lodret paa den forlængede CA. Jeg siger da, at $\square BC$ er større end $\square CA + \square AB$, og at Forskellen er 2 $\square CA, AD$. Thi da den rette Linie CD er delt vilkaar-
II. 4 ligt i Punkt A, saa er $\square DC = \square CA + \square AD + 2 \square CA, AD$. Lad $\square DB$ være lagt til dem begge, saa er $\square CD + \square DB = \square CA + \square AD + \square DB + 2 \square CA, AD$. Men $\square CB$ er lig $\square CD + \square DB$, thi Vinkelen ved D er ret; og $\square AB$ er lig $\square AD + \square DB$; altsaa er $\square CB = \square CA + \square AB + 2 \square CA, AD$. Følgelig er $\square CB$ større end $\square CA + \square AB$, og Forskellen er 2 $\square CA, AD$.



Altsaa: i en stumpvinklet Trekant er Kvadratet paa den Side, der ligger overfor den stumpe Vinkel, større end Summen af Kvadraterne paa de Sider, der indeslutte den stumpe Vinkel; og Forskellen er to Gange det Rektangel, der indeslutes af den af Siderne ved den stumpe Vinkel, paa hvilken den lodrette fældes, og det Stykke, der af den lodrette afskæres udenfor ved den stumpe Vinkel; h. s. b.