

Integralregning - kap 1 og 2:

1. Integrable funktioner og definition af det bestemte integral

s 12-23 (øverst), sætn s 24 uden bevis, sætn s 31 øverst uden bevis, s 40-53, 56 nederst-66

Sætn: Hvis $f(x)$ er begrænset i $[a,b]$ så har den en oversum og en undersum.

Sætn: Antag at $f(x)$ er begrænset i $[a,b]$. Hvis S er en oversum hørende til $f(x)$, så er alle tal større end S også oversummer til $f(x)$. (s. 15)

Bevis: Vi kan hæve overtallet for første delinterval, så det bliver lige præcis så meget større vi ønsker det.

Sætn: Antag at $f(x)$ er begrænset i $[a,b]$. Mængden af oversummer for $f(x)$ vil have formen $]S_f, \infty[$ eller $]S_f, \infty[$. (Tilsvarende med undersummer) (s. 15+16)

Bevis: Følger direkte af sætning ovenfor

Sætn: Antag at $f(x)$ er begrænset i $[a,b]$. En vilkårlig undersum vil være mindre end en vilkårlig oversum. (s 16)

Bevis: Vi kan lave en inddeling, der indeholder både inddelingen for oversummen og for undersummen. Det er klart at til samme inddeling vil alle oversummer være større end en vilkårlig undersum, fordi overtallet i hvert interval er større end det tilsvarende undertal i samme underinterval.

Def: Antag at $f(x)$ er begrænset i $[a,b]$, og dermed har en øvre grænse for undersummerne s_f og en nedre grænse for oversummerne S_f . Hvis $S_f = s_f$ siger vi at f er integrabel. Vi kalder den fælles værdi for

$$\int_a^b f(x) dx$$

(s. 17)

Bemærkning: Af de summer vi har regnet på kan man let indse at integralet angiver arealet, når $f(x)$ er positiv, og arealet regnet med fortegn når $f(x)$ er både positiv og negativ. Det skal forstås sådan at arealet regnes negativt, når grafen ligger under x-aksen.

Sætn: $f(x)$ er integrabel \Leftrightarrow Til ethvert ε kan vi finde en oversum S og en undersum s så $S - s < \varepsilon$. (s. 18)

Bevis: Hvis f er integrabel så er den øvre grænse for undersummerne lig den nedre grænse for oversummerne. Vi kan altså finde en (mange) undersum der ligger mindre end $\varepsilon/2$ under s_f og en oversum der ligger mindre end $\varepsilon/2$ over S_f . Dermed har vi fundet S og s så forskellen er mindre end ε

Antag at vi altid kan finde en oversum S og en undersum s så $S - s < \varepsilon$. Hvis nu $f(x)$ ikke var integrabel, så havde vi altså at $s_f < S_f$ og valgte vi så ε mindre end forskellen $S_f - s_f$, så kunne vi umulig finde en S og s der lå tættere end s_f og S_f . Altså bliver $f(x)$ nødt til at være integrabel.

Sætn: Funktionen $f(x) = x^2$ hvor $x \in [1,2]$ er integrabel (eks 6 s. 18)

Bevis: Vi ser på H_n og V_n , der er højresummen og venstresummen for inddelingen i n lige store intervaller. Vi ser at

$$H_n - V_n \leq (2^2 - 1^2) \cdot \frac{1}{n}$$

Heraf følger resultatet

Sætn: Hvis $f(x)$ er monoton er den også integrabel. (s. 20)

Bevis: Minder om argumentet for x^2 . Vi får, hvis $f(x)$ er voksende, at

$$H_n - V_n \leq (f(b) - f(a)) \cdot \frac{1}{n}$$

Sætn: Hvis $f(x)$ er kontinuert er den integrabel. (uden bevis) (s 21)

Sætn: En funktion med et endeligt antal diskontinuitetspunkter er integrabel. (uden bevis)

Def: Hvis $a < b$ defineres

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

og

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(s. 22)

Sætn: (Indskudsregelen) Lad $f(x)$ være begrænset i $[a, b]$ og lad c være et tal mellem a og b . Så gælder: $f(x)$ er integrabel i $[a, b] \Leftrightarrow f(x)$ er integrabel i $[a, c]$ og i $[c, b]$.

Der vi så gælde

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(s. 21)

Bevis: 1. Antag at $f(x)$ er integrabel i $[a, b]$ og at vi skal finde en oversum og en undersum for $f(x)$ i $[a, c]$ og i $[c, b]$ som ligger mindre end ε fra hinanden. Vi kan nu finde en oversum og en undersum for $f(x)$ i hele $[a, b]$ som ligger mindre end ε fra hinanden og benytte den i de to intervaller. Hvis delepunktet c ikke er med i inddelingen kan vi bare udvide den.

2. $f(x)$ er integrabel i $[a, c]$ og i $[c, b]$. Vi skal finde en oversum og en undersum for $f(x)$ i $[a, b]$ som ligger mindre end ε fra hinanden. Vi ved at vi kan finde en for $f(x)$ i $[a, c]$, der ligger mindre end $\varepsilon/2$ fra hinanden og tilsvarende i $[c, b]$. Dermed har vi fundet en oversum og en undersum for $f(x)$ i $[a, b]$ som ligger mindre end ε fra hinanden.

2. Stamfunktion og ubestemt integral

Sætn: Antag at $F(x)$ er stamfunktion til $f(x)$. Da gælder følgende:

$F_2(x)$ er stamfunktion til $f(x) \Leftrightarrow F_2(x) = F(x) + k$ (s. 42)

Bevis: Det er klart at \Leftarrow er rigtig.

Antag nu at $F_2(x)$ er stamfunktion til $f(x)$ og betragt funktionen

$$G(x) = F_2(x) - F(x)$$

$G(x)$ vil opfylde at $G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Da $G'(x)$ altid er 0 følger at $G(x) = k$

Dvs at $k = F_2(x) - F(x)$ eller at $F_2(x) = F(x) + k$

Def: Vi definerer det ubestemte integral som familien af stamfunktioner til $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + k$$

Sætn: Hvis f og g er kontinuert i $[a, b]$ så gælder (s. 46)

$$\begin{aligned} \int f(x) \pm g(x) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx \end{aligned}$$

Bevis: Sætningen er en omskrivning af vores sætninger om differentiation.

3. Bestemt integral og stamfunktion

Sætn: (Integralregningens middelværdisætning) Hvis $f(x)$ er kontinuert i $[a,b]$ så finder der et \tilde{x} så

$$f(\tilde{x}) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

(s 48)

Bevis: Da $f(x)$ er kontinuert i et lukket interval er VM(f) også lukket. Lad $VM=[d,e]$. Vi har nu at $d \cdot (b-a)$ er en undersum og $e \cdot (b-a)$ en oversum. Dvs at

$$d \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq e \cdot (b-a) \Leftrightarrow d \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq e$$

men da VM(f) netop er $[d,e]$ så finder der et \tilde{x} så

$$f(\tilde{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow f(\tilde{x}) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

Sætn: Hvis $f(x)$ er kontinuert i $[a,b]$ så er

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

en stamfunktion til $f(x)$. (s. 49)

Bevis:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt =$$

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt = \Delta x \cdot f(\tilde{x})$$

hvor et $\tilde{x} \in [x_0, x_0 + \Delta x]$. Dermed bliver

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{\Delta x \cdot f(\tilde{x})}{\Delta x} = f(\tilde{x})$$

Men når $\Delta x \rightarrow 0$ vil $\tilde{x} \rightarrow x_0$ og dermed vil $F(x)$ være differentiabel med

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Sætn: Hvis $f(x)$ er integrabel i $[a,b]$ og F er stamfunktion til $f(x)$ så er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(s. 50)

Bevis: Antal at $F(x)$ er en vilkårlig stamfunktion. Da er $F(x) = \int_a^x f(t) dt + k$ da

$\int_a^x f(t) dt$ også er en stamfunktion til $f(x)$. Dermed er

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + k - (\int_a^a f(t) dt + k) = \int_a^b f(t) dt$$

4. Regneregler for bestemt integral

Sætn: (Regneregler for bestemte integraler). Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte i $[a,b]$ så er

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$
$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

(s. 52)

Bevis: Sætningen bevises ved at benytte de tilsvarende sætninger for ubestemte integraler.

Sætn: (substitution ubestemt integral)

Under passende forudsætninger (hvilke?) gælder, hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$ så er

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + k = F(g(x)) + k$$

(s 56-57)

Bevis: Kaldes leddene 1-2-3 og 4 så er det trivielt at 2=3 og 3=4. At 1=4 kan kontrolleres ved at differentiere $F(g(x))$

Sætn: (substitution bestemt integral)

Under passende forudsætninger (hvilke?) gælder, hvis $F(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

(s. 58)

Bevis: Benyttes sætningen for ubestemt integral får vi at begge sider giver $F(g(b)) - F(g(a))$

5. Areal og rumfang

Sætn: (Areal mellem grafer). Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerte funktioner, der opfylder $g(x) \leq f(x)$ i $[a,b]$ så er arealet mellem graferne:

$$Areal = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

(s 61)

Bevis: Hvis $g(x)$ er ikke-negativ er det klart at $Areal = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$

Hvis $g(x)$ er positiv kan vi bestemme en konstant c så $0 \leq c + g(x)$ (fordi g er kontinuert i et LUKKET interval. Arealet mellem $g(x)$ og $f(x)$ er det samme som arealet mellem $g(x)+c$ og $f(x)+c$ og det er

$$Areal = \int_a^b (f(x) + c) - (g(x) + c) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Sætn: (Rumfang af omdrejningslegeme). Hvis $f(x)$ er kontinuert og ikke-negativ i $[a,b]$ så er RF af omdrejningslegemet

$$RF = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

(uden bevis) (s. 65)