

Statistik

1. Gennemsnit. Standardafvigelse

Ved et *observationssæt* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ forstås en række af n tal (eventuelt med en enhed) fremkommet

- ved registreringer af en bestemt egenskab i en given population
fx “højden af eleverne i en klasse”
- eller ved gentagen udførelse af det samme stokastiske eksperiment
fx “gentagne kast med en terning” eller “gentagne målinger af den samme fysiske størrelse”

Et *stokastisk eksperiment* er karakteriseret ved, at der er forskellige mulige udfald af eksperimentet, men hvilket udfald, der lige fås denne gang, vides ikke.

I et observationssæt kan nogle af de enkelte observationer x_i godt tænkes at være ens. (Der kan fx godt i en klasse være to personer, der er lige høje).

Definition af *gennemsnit* af X :

$$\langle X \rangle \equiv \frac{1}{n} \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

Definition af *gennemsnit* af X^2 :

$$\langle X^2 \rangle \equiv \frac{1}{n} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

Definition af *standardafvigelse*:

$$s(X) \equiv \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

Standardafvigelsen $s(X)$ er et mål for, hvor meget de enkelte observationer i gennemsnit afviger fra gennemsnitsværdien $\langle X \rangle$.

Opgave 1

Betragt observationssættet $X = (2, -3, 0, 4, 1)$.

Jeg forestiller mig, at det over en 5-årig periode angiver en bestemt virksomheds overskud (i mio. kr.).

Beregn $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $s(X)^2$ og $s(X)$.

Opgave 2

Betragt observationssættet $X = (2, 2, 4, 2, 1, 2, 3, 3, 2, 3)$.

Giv et forslag til en fortolkning af tallene.

Beregn $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $s(X)^2$ og $s(X)$.

Opgave 3

Betragt de tre observationssæt $X = (9, 8, 03, 10, 7, 8, 11)$, $Y = (5, 11, 9, 7, 6, 8, 10)$ og

$Z = (8, 8, 8, 8, 8, 8, 8)$.

Observationssættene angiver matematikprøve-karaktererne for tre forskellige elevgrupper.

Beregn $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $s(X)^2$ og $s(X)$. Beregn $\langle Y \rangle$, $\langle Y^2 \rangle$, $s(Y)^2$ og $s(Y)$.

Beregn $\langle Z \rangle$, $\langle Z^2 \rangle$, $s(Z)^2$ og $s(Z)$.

2. Hyppigheder og frekvenser

Det første, der skal til for at overskue et givet observationssæt, er en udpegning af hvilke (forskellige) observationsværdier, som rent faktisk forekommer, samt hvor mange gange hver af disse observationsværdier optræder. Dette kaldes en *sortering* af observationssættet.

De N forskellige observationsværdier, som kan forekomme, kaldes *udfald*, og betegnes

$$u_1, u_2, \dots, u_N, \quad N \leq n$$

Ved *hyppigheden* h_i for et udfald forstås “det antal gange som udfaldet ($= u_i$) optræder i det oprindelige observationssæt”. Af definitionen følger, at hyppighederne h_i opfylder følgende:

$$0 \leq h_i \leq n \quad \text{og} \quad h_1 + h_2 + \dots + h_N = n.$$

Ved *frekvensen* f_i for et udfald forstås “det *relative* antal gange som udfaldet ($= u_i$) optræder i det oprindelige observationssæt”. Af definitionen følger, at frekvenserne f_i opfylder følgende:

$$f_i = h_i / n$$

$$0 \leq f_i \leq 1 \quad \text{og} \quad f_1 + f_2 + \dots + f_N = 1$$

Sorteret observationssæt

Udfald	u_1	u_2	...	u_N	Sum
Hyppighed	h_1	h_2	...	h_N	n
Frekvens	f_1	f_2	...	f_N	1

Opgave 4

I en gymnasieklasse opnås følgende eksamenskarakterer i skriftlig dansk:

$X = (9, 9, 10, 03, 6, 7, 7, 11, 8, 10, 00, 8, 9, 5, 9, 10, 7, 6, 5, 10, 9, 8, 8, 8, 9)$.

Sortér observationssættet i et skema som ovenstående. Resultatet bruges i en senere opgave.

3. Beregning af $\langle X \rangle$ og $s(X)$ ud fra kendskab til frekvenserne

Ofte vil du blive præsenteret for et statistisk materiale, der allerede foreligger på sorteret form. I disse tilfælde beregnes gennemsnit og standardafvigelse ved hjælp af nedenstående formler.

$$\langle X \rangle = u_1 \cdot f_1 + u_2 \cdot f_2 + \dots + u_N \cdot f_N$$

$$\langle X^2 \rangle = u_1^2 \cdot f_1 + u_2^2 \cdot f_2 + \dots + u_N^2 \cdot f_N$$

$$\text{Bevis for } \langle X \rangle : \quad \langle X \rangle = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n \quad \Leftrightarrow$$

$$\langle X \rangle = (u_1 \cdot h_1 + u_2 \cdot h_2 + \dots + u_N \cdot h_N) / n \quad \Leftrightarrow$$

$$\langle X \rangle = u_1 \cdot h_1 / n + u_2 \cdot h_2 / n + \dots + u_N \cdot h_N / n \quad \Leftrightarrow$$

$$\langle X \rangle = u_1 \cdot f_1 + u_2 \cdot f_2 + \dots + u_N \cdot f_N . \quad \text{Bevis slut.}$$

Beviset for $\langle X^2 \rangle$ er helt analogt til ovenstående.

Opgave 5

Givet det nedenfor viste sorterede observationssæt X .

Udfald	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
Hyppighed	0	3	3	4	6	3	1
Frekvens							

Betydningen af tallene er forskellen i karakter på prøven i matematik med og uden hjælpemidler (22 maj 2005). (Eksempelvis betyder den sidste søjle, at der var 1 elev som i prøven med hjælpemidler klarede sig 3 karakterpoint bedre end i prøven uden hjælpemidler).

Beregn $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $s(X)^2$ og $s(X)$.

Opgave 6

Betrakt observationssættet fra Opgave 4.

Beregn $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $s(X)^2$ og $s(X)$.

Opgave 7

Find ud af hvordan du kan beregne $\langle X \rangle$ og $s(X)$ ved hjælp af specielle taster på din grafregner.

Dansk	Engelsk
Hyppighed	Frequency
Frekvens	Relative frequency

4. Alternativ definition på standardafvigelse

I faglitteratur *defineres* standardafvigelsen $s(X)$ ofte som angivet nedenfor.

Alternativ definition på standardafvigelse

$$s(X)^2 = f_1 \cdot (u_1 - \langle X \rangle)^2 + f_2 \cdot (u_2 - \langle X \rangle)^2 + \dots + f_N \cdot (u_N - \langle X \rangle)^2$$

Bevis for, at dette er i overensstemmelse med vores oprindelige definition.

Bevis

$$f_1 \cdot (u_1 - \langle X \rangle)^2 + f_2 \cdot (u_2 - \langle X \rangle)^2 + \dots + f_N \cdot (u_N - \langle X \rangle)^2 =$$

$$f_1 \cdot (u_1^2 + \langle X \rangle^2 - 2 \cdot u_1 \cdot \langle X \rangle) + f_2 \cdot (u_2^2 + \langle X \rangle^2 - 2 \cdot u_2 \cdot \langle X \rangle) + \dots + f_N \cdot (u_N^2 + \langle X \rangle^2 - 2 \cdot u_N \cdot \langle X \rangle) =$$

$$(f_1 \cdot u_1^2 + f_2 \cdot u_2^2 + \dots + f_N \cdot u_N^2) + (f_1 \cdot \langle X \rangle^2 + f_2 \cdot \langle X \rangle^2 + \dots + f_N \cdot \langle X \rangle^2) - (2 \cdot f_1 \cdot u_1 \cdot \langle X \rangle + 2 \cdot f_2 \cdot u_2 \cdot \langle X \rangle + \dots + 2 \cdot f_N \cdot u_N \cdot \langle X \rangle) =$$

$$\langle X^2 \rangle + (f_1 + f_2 + \dots + f_N) \cdot \langle X \rangle^2 - 2 \cdot \langle X \rangle \cdot (f_1 \cdot u_1 + f_2 \cdot u_2 + \dots + f_N \cdot u_N) =$$

$$\langle X^2 \rangle + 1 \cdot \langle X \rangle^2 - 2 \cdot \langle X \rangle \cdot \langle X \rangle = \langle X^2 \rangle + \langle X \rangle^2 - 2 \cdot \langle X \rangle^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2. \quad \text{Bevis slut.}$$

5. Normal ?

For et givet statistisk materiale vil de fleste enkeltobservationer i almindelighed klumpe sig sammen omkring gennemsnitsværdien $\langle X \rangle$. Disse udfald kaldes *normale*. Undertiden vil der konstateres enkeltobservationer forholdsvis langt fra $\langle X \rangle$. Disse udfald kaldes *exceptionelle*. De klassiske grænser for at være normal og exceptionel fremgår af følgende figur:

Exceptionelt små udfald	Grå zone	Normalområdet				Grå zone	Exceptionelt store udfald
$\langle X \rangle - 3 \cdot s(X)$	$\langle X \rangle - 2 \cdot s(X)$		$\langle X \rangle$		$\langle X \rangle + 2 \cdot s(X)$	$\langle X \rangle + 3 \cdot s(X)$	

De udfald, der ligger mindre end 2 standardafvigelser væk fra $\langle X \rangle$ kaldes normale. Udfald, hvis afstand til $\langle X \rangle$ er større end 3 standardafvigelser, kaldes exceptionelle. Mellem de to definerede områder ligger en *gråzone*. Om man vil kalde udfald i dette område for ca. normale, unormale, næsten exceptionelle, ... er delvis en personlig vurdering. Sådanne personlige vurderinger er ofte baggrunden for, at eksperter offentligt kan skændes om fortolkningen af en forelagt undersøgelse.

Et udfald inden for det normale område siges at være et *tilfældigt statistisk udfald*. Et udfald i det exceptionelle område siges at være en *statistisk signifikant afvigelse*.

Det skal bemærkes, at grænserne mellem normal/exceptionel i forskellige vidensområder og i forskellige konkrete situationer mageligt kan afvige fra de her benyttede klassiske grænser: $2 \cdot s(X)$ og $3 \cdot s(X)$.

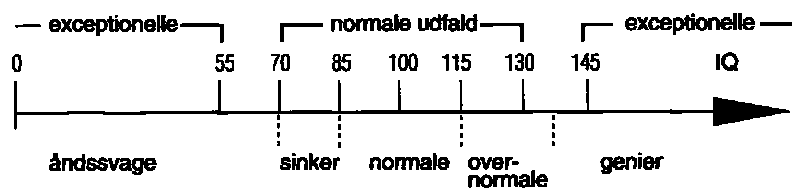
Eksempel 1 IQ. Intelligenskvotient

Et barns intelligenskvotient kan fx fastsættes ved at udsætte det for en række prøver af alle mulige sværhedsgrader: nogle er så lette, at de normalt kan klares allerede i fem-årsalderen, andre så svære, at de normalt først kan klares i femten-årsalderen. Ud fra disse prøver fastlægges så barnets såkaldte *intelligens-alder*.

Hvis fx et 10-års barn kan klare de prøver, der er typiske for, hvad 12-års børn kan præstere, har barnet intelligens-alderen 12 år. Barnets intelligenskvotient udregnes nu som forholdet mellem dets intelligens-alder og dets biologiske alder (omsat til %, idet procenttegnet dog udelades):

$$IQ = \text{Intelligens-alder} / \text{Biologisk alder} \cdot 100$$

I ovenstående tilfælde er barnets intelligenskvotient derfor 120. Middelintelligensen er pr. definition 100. Det viser sig ydermere, at standardafvigelsen er 15. En typisk klassifikation af intelligenskvotienter ser således ud:



Opgave 8

- a) Undersøg om alle udfaldene i observationssættet i Opgave 1 statistisk set er normale.
Hvis ikke så udpeg de udfald, der er exceptionelle, samt de udfald, der ligger i gråzonen.
- b) Undersøg på lignende måde talmaterialerne i Opgave 3, 5 og 6.

Opgave 9 Avisoverskrifter

Et hemmeligt sted på den danske Øresundskyst måles den radioaktive baggrundsstråling løbende. Med det anvendte apparatur måles under normale forhold en gennemsnitsværdi på 11,6 cps og en standardafvigelse på 3,4 cps. En mørk novembernat i 2003 målttes værdien 20,1 cps.

Uddrag af næste dags aviser:

- NOAH: *Strålingsniveauet er 73 % over det normale*
 - Talsmand for Barseback: *Det er et tilfældigt statistisk udsving*
 - Uafhængig ekspert nr. 1: *Intet er bevist. Udsvinget er ikke statistisk signifikant*
 - Uafhængig ekspert nr. 2: *Det målte strålingsniveau er helt klart unormalt*
- a) Kommentér hver af de fire overskrifter. Hvem har ret ?

6. Hvor mange er normale ?

De udfald u_i , der ligger længere end 3 standardafvigelser væk fra gennemsnittet $\langle X \rangle$, er jo pr. definition exceptionelle:

$$u_i \text{ er exceptionel} \Leftrightarrow |u_i - \langle X \rangle| \geq 3 \cdot s(X).$$

Lad os antage, at der er N exceptionelle udfald, og at nummereringen af de mulige udfald er således, at det er de N første: $u_1, u_2, \dots, u_N$. (Hvis der slet ikke er nogle exceptionelle udfald, så er $N = 0$). Den brøkdel ϵ , som de exceptionelle enkeltobservationer udgør af det samlede antal enkeltobservationer, kan nu vurderes således:

$$\epsilon = f_1 + f_2 + \dots + f_N \quad \Leftrightarrow$$

$$(3s)^2 \cdot \epsilon = (3s)^2 \cdot (f_1 + f_2 + \dots + f_N) \quad \Leftrightarrow$$

$$(3s)^2 \cdot \epsilon = (3s)^2 \cdot f_1 + (3s)^2 \cdot f_2 + \dots + (3s)^2 \cdot f_N \leq (u_1 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_1 + (u_2 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_2 + \dots + (u_N - \langle X \rangle)^2 \cdot f_N \quad \Leftrightarrow$$

$$(3s)^2 \cdot \epsilon \leq (u_1 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_1 + (u_2 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_2 + \dots + (u_N - \langle X \rangle)^2 \cdot f_N \quad \Leftrightarrow$$

(eftersom $N \leq N$)

$$(3s)^2 \cdot \epsilon \leq (u_1 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_1 + (u_2 - \langle X \rangle)^2 \cdot f_2 + \dots + (u_N - \langle X \rangle)^2 \cdot f_N \quad \Leftrightarrow$$

$$(3s)^2 \cdot \epsilon \leq s^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 \cdot s^2 \cdot \epsilon \leq s^2 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq 1/3^2 \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon \leq 11,1 \%.$$

Det er således højst 11 % af enkeltobservationerne i et hvilket som helst observationssæt, der kan være exceptionelle. Hvis enkeltobservationerne grupperer sig (nogenlunde) symmetrisk om $\langle X \rangle$, så svarer dette til, at højst 5,5 % af enkeltobservationerne kan være exceptionelt store. Eller tilsvarende: højst 5,5 % af enkeltobservationerne kan være exceptionelt små.

Ved at udskifte 3-tallet i ovenstående udregning med et 2-tal fås: $\epsilon \leq 1/2^2 \Leftrightarrow \epsilon \leq 25 \%.$

Fortolkning: Det er højst 25 % af enkeltobservationerne i et hvilket som helst observations-sæt, der kan ligge uden for det normale område. Eller sagt på en anden måde: Det er mindst 75 % af enkeltobservationerne i et hvilket som helst observationssæt, der ligger inden for det normale område.

Gælder for alle (symmetriske) statistiske fordelinger

Exceptionelt små udfald	Grå zone	Normalområdet	Grå zone	Exceptionelt store udfald
Højst 5,5 % af alle udfald		Mindst 75 % af alle udfald		Højst 5,5 % af alle udfald
$<X> - 3 \cdot s(X)$	$<X> - 2 \cdot s(X)$	$<X>$	$<X> + 2 \cdot s(X)$	$<X> + 3 \cdot s(X)$

I praktisk forekommende statistiske materialer udgør det normale område så godt som altid en betydeligt større andel end 75 %, og det exceptionelle område en betydelig mindre andel end 11 %. For såkaldte *gaussfordelinger* (= *normalfordelinger*) er procenttallene henholdsvis 95,44 % og 0,26 %.

For normalfordelinger

Exceptionelt små udfald	Grå zone	Normalområdet	Grå zone	Exceptionelt store udfald
Netop 0,13 % af alle udfald		Netop 95,44 % af alle udfald		Netop 0,13 % af alle udfald
$<X> - 3 \cdot s(X)$	$<X> - 2 \cdot s(X)$	$<X>$	$<X> + 2 \cdot s(X)$	$<X> + 3 \cdot s(X)$

7. Bernoulli-serier

For et givet stokastisk eksperiment (= *basiseksperimentet*) udnævnes et eller flere af udfaldene til at være ensbetydende med *succes*. Sandsynligheden for, at basiseksperimentet resulterer i "succes", kaldes *basissandsynligheden* og betegnes p . Basiseksperimentet tænkes nu (uafhængigt af hinanden) gentaget et vist antal gange n (= *antalsparametren*). En sådan serie af stokastiske eksperimenter kaldes en *Bernoulli-serie*. Det skal specielt understreges, at for at en serie stokastiske eksperimenter er en Bernoulli-serie, skal sandsynligheden p være den samme for hver gang, basiseksperimentet udføres, ligesom de enkelte basiseksperimenter skal udføres uafhængigt af hinanden.

For hvert udført basiseksperiment noteres, om udfaldet er en succes eller ej. Det *samlede antal succeser* i de n basisforsøg er en stokastisk variabel X . Denne variable siges at være *binomialfordelt*.

Eksempel 2

Som eksempler på binomialfordelte stokastiske variable kan man tænke på "antal seksere i 12 kast med en terning", eller på "antal plat i 16 kast med en mønt".

For en binomialfordelt variabel X gælder:

$$\langle X \rangle = n \cdot p \quad \text{og} \quad s(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Bemærk, at i situationer, hvor chancen for "succes" er meget lille ($p \ll 1$) gælder:

$$\langle X \rangle = n \cdot p \quad \text{og} \quad s(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx \sqrt{n \cdot p \cdot 1} = \sqrt{\langle X \rangle}$$

Opgave 10

- Gør rede for, at situation nr.1 i Eksempel 2 virkelig er et eksempel på en binomialfordelt stokastisk variabel. (Angiv basiseksperiment, udfaldet "succes", basissandsynlighed samt antalsparametren).
- Beregn $\langle X \rangle$ og $s(X)$.
- Samme spørgsmål for kastene med mønten.

Opgave 11 God til seksere ?

En person hævder at være exceptionel god til at slå seksere med en terning. I 60 kast får hun da også 60% flere seksere end forventet. Har hun overbevist dig ?

Eksempel 2 Sellafeld

For nogle år siden kunne man læse i aviserne, at der i et bestemt område af England i nærheden af det omstridte atomopbejdningsanlæg Sellafeld (tidligere Windscale) i en bestemt periode var konstateret flere leukæmitilfælde end normalt; nemlig 29 mod de normale ca. 14. Kan det skyldes en tilfældighed ?

Hvis vi antager, at alle personer i det pågældende område har samme risiko for at få leukæmi, så kan man opfatte antallet af leukæmitilfælde som en binomialfordelt størrelse. Basiseksperimentet er: Får person nr. 1 i området leukæmi eller ej. "Succes" er i denne forbindelse at få leukæmi. Basissandsynligheden er den enkelte persons risiko for at få leukæmi. Antalsparametren svarer til antal mennesker i det betragtede område.

Hverken antalsparametren eller basissandsynligheden er kendte, men det er til gengæld gennemsnittet $\langle X \rangle$, idet $\langle X \rangle = 14$. Endvidere er $p \ll 1$, så $s(X) = \sqrt{\langle X \rangle} = \sqrt{14} = 3,74$.

Idet $\langle X \rangle + 3 \cdot s(X) = 14 + 3 \cdot 3,74 = 25,2$ så er det målte antal leukæmitilfælde (nemlig 29) uden disussion exceptionel stort. Konklusionen er, at 29 leukæmitilfælde ikke kan forklares som et tilfældigt, statistisk udsving, men må fortolkes som en reel forøgelse af sygdommens udbredelse.

Opgave 12 Platte-Kaj

Platte-Kaj påstår, at han er rigtig god til plat. Han kaster en mønt 25 gange og får plat 21 af gangene. Er det bemærkelsesværdigt ?

Opgave 13 Thulearbejderne

Kræfttrisikoen for 1200 danske arbejdere kan vurderes til i gennemsnit at være ca. 25 tilfælde.

- a) Gør rede for, at antallet X af kræfttilfælde i en tilfældig gruppe af 1200 danske arbejdere under visse antagelser kan anses for at være binomialfordelt. (Angiv basiseksperiment, udfaldet "succes", basissandsynlighed samt antalsparameter).
- b) Hvad er det for "visse antagelser", der hentydes til ovenfor ?
- c) Udregn standardafvigelsen $s(X)$.
- d) Hvor stor en stigning i antallet af kræfttilfælde kan anses for normalt ?

Den 21. januar 1968 faldt et amerikansk B52-fly med fire atombomber om bord ned på indlandsisen tæt ved Thule-basen. Ca. 1200 danskere arbejdede på Thulebasen i perioden fra nedstyrtningen til oprydningen officielt afsluttedes. Se nedenstående avisudklip.

- e) Hos disse arbejdere er konstateret 40 % flere kræfttilfælde end normalt. Kan dette skyldes et tilfældigt, statistisk udsving ?

Blandt de 130 arbejdere, der deltog i det umiddelbare oprydningsarbejde, blev der observeret 4 kræfttilfælde.

- f) Hvad er det forventede antal kræfttilfælde hos disse arbejdere ?
- g) Er 4 kræfttilfælde (statistisk set) foruroligende ?

Avisudklip fra 1988

Et styrt med uanet risiko for kræft

Mange syge da amerikansk bombefly forulykkede i Thule

Af Susanne Zehngraft

Månen strålede klart på den sorte polarhimmel den eftermiddag på Thule-hasen for næsten 20 år siden, da kimen til mange menneskelige omkostninger blev hvirvlet rundt i atmosfæren

Den 21. januar 1968 faldt et amerikansk B52-fly med fire brintbomber om bord ned på indlandsisen ca. 12 km vest for den amerikanske radar-base i Thule på den nordvestlige top af Grønland. En om bord omkom ved styrtet, der betød, at uanede mængder af radioaktive stoffer, som plutonium, tritium, der er radioaktiv brint, og måske også uran blev sluppet løs i luften, i isen og i havet. En bombe indeholdt sandsynligvis omkring fire

kg plutonium, der er det farligste af alle radioaktive stoffer. Så formentlig blev i hvert fald omkring 16 kg bare af dette dødsens-farlige stof spredt.

Umiddelbart efter styrtet blev der straks sendt hundeslæder og helikoptre ud fra basen, og i dagene efter ankom amerikanske specielt trænede atomrenovationsfolk. Men også danskere, der arbejdede på basen, og 12 fangere fra Thule kommune deltog i slukningsarbejdet efter eksplosionen ved nedstyrtningen og i oprydningsarbejdet med at fjerne sne og vragede.

Omkring 130 danske mænd var med i det umiddelbare oprydningsarbejde, men mange flere deltog senere i arbejdet, og i alt 1202 danskere var ansat på basen i perioden fra nedstyrtningen og til oprydningen officielt sluttede i midten af september.

Op mange af dem er i dag syge og flere fryg-

ter at blive det, fordi f.eks. leverkræft efter udsættelse for plutonium først viser sig tidligst efter 20 år. Dansk Institut for Klinisk Epidemiologi, DIKE, har undersøgt dødeligheden i den samme gruppe og kom i februar 1987 frem til, at der ikke var nogen forskel mellem Thule-arbejdernes dødelighed og den danske normalbefolkning. For Thule-arbejderne som helhed har en undersøgelse fra DIKE sidste efterår dog vist, at de har en overdødelighed i forhold til alle danskere især af lungekræft og selvmord.

40 pct. flere kræfttilfælde blev også fundet hos de arbejdere, der var ansat på basen i oprydningsperioden i forhold til andre ansatte på Thule-basen. Men denne forskel er "dog ikke statistisk sikker nok til, at forskerne kunne sige, at der var tale om en forskel, som man kan tillægge betydning", hedder det i en presmeddelelse fra DIKE.

Opgave 14 Biologisk Forskning

I lærebogen »Biologisk Forskning« beskrives følgende eksperiment:

En forsker, der undersøger krydsningen mellem to forskellige slags tomatplanter, forventer, at halvdelen af afkommet vil få gule blade og den anden halvdel grønne blade. I forsøget finder videnskabsmanden imidlertid, at 671 ud af i alt 1240 kimplanter får gule blade.

Skyldes denne afvigelse mellem forventet og iagttaget fordeling alene en tilfældighed ?

Eller er afvigelsen så stor, at der er tale om en signifikant afvigelse fra den forventede fordeling ?

I »Biologisk Forskning« konkluderer man efter en beregning, som vi forbigår, at afvigelsen er for stor til, at den alene kan skyldes en tilfældighed.

a) Vurdér rimeligheden af denne konklusion.

Opgave 15 Meningitis

a) Læs nedenstående avisartikel fra Politiken d. 17. marts 1989.

b) Har drenge i Frederiksborg Amt større sandsynlighed for at få meningitis end piger ?

Meningitis er drengesygdom

Undersøgelse på vej om ny risikofaktor

Af Kaare Skovmand

Drenge er tilsyneladende mere udsat for meningitis end piger. En opgørelse over alle de tilfælde af meningitis, der i 1987-1989 har ramt skoleelever i Frederiksborg Amt, viser at 70 procent af de ramte var drenge, og blot 30 procent var piger. Embedslægerne vil nu bede Statens Seruminstitut undersøge, om denne tendens i spredningen af sygdommen ikke kun er lokal, men også gælder på landsplan.

Tallene er så markante, at det ikke kan tilskrives en tilfældighed, siger embedslæge-assistent Peter Ege til Politiken.

Om det hænger sammen med, at drenge er biologisk anderledes udrustet end piger, ved vi ikke. Men det er en problemstilling, vi hidtil ikke har været opmærksomme på, og den er værd at undersøge. Vi ved, at alderen er en risiko-faktor. Nu tyder noget på, at kønnene

også kan være det, siger Peter Ege.

Frederiksborg Amt har siden nytår oplevet en usædvanlig ophobning af meningitis-tilfælde, og området har i de senere år generelt været hårdere ramt end det øvrige land - uden at lægerne ved hvorfor. Siden 1987 er der konstateret 43 skoletilfælde i amtet, og 30 af patienterne har været drenge.

Opgave 16

Statistik-Bente ønsker at undersøge om Alternative-Svend virkelig besidder psykokenetiske evner (= evnen til ved psykiske kræfter at bevæge materielle ting). Alternative-Svend påstår ikke, at han kan få en terning kastet fra en terningekastemaskine til at lande på en sekser hver eneste gang. Men han påstår, at han kan få markant flere seksere end forventet.

- a) Giv et begrundet forslag til, hvordan Statistik-Bente kan tilrettelægge et fair eksperiment til at teste Alternative-Svends eventuelle psykokenetiske evner.
- b) I et testforsøg viser det sig, at Alternative-Svend opnår en score, der ligger næsten fire standardafvigelser over det forventede. Hvad kan man slutte heraf?
- at der er indtruffet en meget sjælden begivenhed ?
 - at Alternative-Svend har psykokenetiske evner ?
- c) På grundlag af testforsøget i b) kan Statistik-Bente komme til at begå en fejl. Hun kan nemlig med en vis ret hævde, at Alternative-Svend har psykokenetiske evner; selv om det kan tænkes, at han bare har været usædvanlig heldig. Risikoen for at begå denne type fejl (= fejl af Type 1) kan mindskes ved at ændre grænsen mellem gråzonen og det øvre exceptionelle område. Forklar.
- d) I et andet testforsøg viser det sig, at Alternative-Svend opnår en score, der ligger 2,3 standardafvigelser over det forventede. Kan man heraf udelukke, at Alternative-Svend ikke har psykokenetiske evner?
- e) På grundlag af testforsøget i d) kan Statistik-Bente komme til at begå en fejl. Hun kan nemlig med en vis ret hævde, at Alternative-Svend ikke har psykokenetiske evner; selv om det kan tænkes, at han bare har været usædvanlig uheldig. Risikoen for at begå denne type fejl (= fejl af Type 2) kan mindskes ved at ændre grænsen mellem gråzonen og det øvre exceptionelle område. Forklar.
- f) Sig noget fornuftigt om samtidigt at prøve at undgå fejl af både Type 1 og 2.

8. Fejl af Type1 og Type2

I en statistisk test undersøges i regelen, om “noget er normalt eller unormalt”. Før det kan lade sig gøre, må man selvfølgelig vedtage, hvad der i det konkrete tilfælde anses for henholdsvis normalt og exceptionelt (unormalt).

Type1- fejl Hvis en statistisk test resulterer i et resultat, der tilhører det exceptionelle område, så er det *statistisk* set “bevist”, at det undersøgte fænomen afviger fra det normale. Men derfor behøver det ikke i virkeligheden at forholde sig sådan! Det kunne jo være, at der blot var tale om et sjældent; men dog stadig et *tilfældigt* statistisk udsving. (En gang imellem kan du jo være heldig i kast med en mønt at få plat fem gange i træk).

Man risikerer altid at tage fejl, når man godtager et statistisk signifikant resultat som bevis for, at det undersøgte fænomen også i almindelighed afviger markant fra det normale. Jo skrappe krav, der stilles til at være exceptionel, fx $\langle X \rangle + 4 \cdot s(X)$, jo mindre er risikoen for at begå en fejl af Type1.

Type2- fejl Hvis en statistisk test resulterer i et resultat, der ikke tilhører det exceptionelle område, så er det *statistisk* set “bevist”, at det undersøgte fænomen ikke afviger fra det normale. Men derfor behøver det ikke i virkeligheden at forholde sig sådan! Det kunne jo være, at der blot var tale om et sjældent; men dog stadig et *tilfældigt* statistisk udsving. (Selv den vildeste plat-konge kan en gang imellem være uheldig og kun få én plat ud af 10 mulige). *Man risikerer altid at tage fejl, når man godtager et statistisk ikke-signifikant resultat som bevis for, at det undersøgte fænomen heller ikke i almindelighed afviger fra det normale.* Jo mindre krav, der stilles til at være exceptionel, fx $\langle X \rangle + 2,2 \cdot s(X)$, jo mindre er risikoen for at begå en fejl af Type2.

Hvis man på en gang vil minimere risikoen for både at begå fejl af Type1 og af Type2, så må man indgå et kompromis mellem en lille og en stor grænse for at være exceptionel. I konkrete tilfælde er det undertiden oplagt, hvilken af de to typer fejl, som det er vigtigst at undgå.

Opgave 17

Til helbredelse af en bestemt alvorlig sygdom anvendes en behandling, hvis virkning her betegnes som den normale. Et medicinalfirma har udviklet en ny type medicin, som firmaet hævder kan helbrede flere patienter for den pågældende sygdom. Den ny type medicin er desværre meget dyr og samtidig smertefuld for patienterne. Der foretages nu en statistisk undersøgelse, hvor den nye medicins virkning sammenholdes med det normale (de traditionelle behandlingsmetoder).

- Hvis der blandt de patienter, som deltager i undersøgelsen, statistisk set er signifikant flere patienter end normalt, der bliver helbredt, så risikerer man at begå en fejl af Type1.
Hvilke konsekvenser har en Type1-fejl i denne forbindelse for henholdsvis medicinalfirmaet, det offentlige og patienterne?
- Hvis der blandt de patienter, som deltager i undersøgelsen, statistisk set ikke er signifikant flere patienter end normalt, der bliver helbredt, så risikerer man at begå en fejl af Type2.
Hvilke konsekvenser har en Type2-fejl i denne forbindelse for henholdsvis medicinalfirmaet, det offentlige og patienterne?
- Direktøren for medicinalfirmaet og direktøren for Sundhedsstyrelsen skændes i TV-Avisen om, hvad den omtalte statistiske test egentlig viser. Det kommer frem, at en del af forklaringen på uenigheden er, at de fastsætter grænsen for det exceptionelle område forskelligt. Er der noget forkert i det?
De to grænser er iøvrigt $\langle X \rangle + 2,5 \cdot s(X)$ og $\langle X \rangle + 3,5 \cdot s(X)$. Hvilken af disse to grænser tror du medicinalfirmaet anvendte?