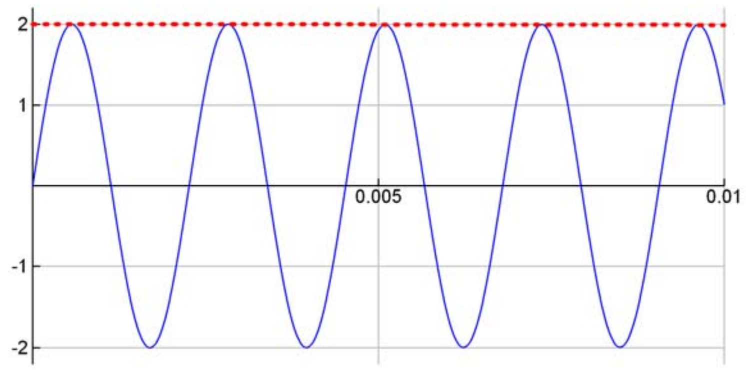
Appendiks 1: Om svævning:

Hvis to toner ligger meget tæt på hinanden opstår et interessant akustisk og matematisk fænomen, der kaldes svævning. Det er dette fænomen, der ligger bag alle de steder, hvor vi hører klange der ”støder” eller ”svinger”.

Nedenfor er tegnet svingningsmønsteret for to sinus-toner med frekvensen 440 og 443 Hz:

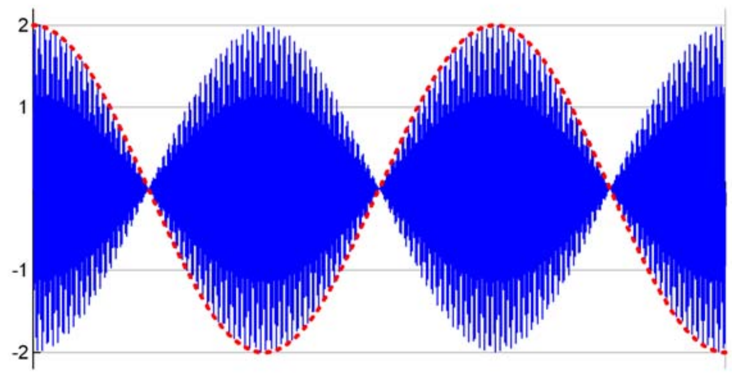
$$f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi \cdot x) + \sin(443 \cdot 2\pi \cdot x)$$

Grafen for *f(x)* er den blå graf. Den røde graf angiver amplituden.



Ser vi på 1/100 sek, så ligner den blå kurve, der er summen af de to sinussvingninger til forveksling en sinuskurve. Regner man på det, så er frekvensen af denne svingning 441.5 Hz – altså gennemsnittet af de to toner vi har lagt sammen.

Men den opfører sig ikke helt som en almindelig tone. Det kan vi se, hvis vi ser på hvad der sker i løbet af 1 sekund.



Her ser vi, at amplituden for tonen ændrer sig. Den røde kurve viser sig at være en langsom sinus-svingning.

Vi ser hvordan tonen tre gange forsvinder og kommer igen.

Den ”støder” 3 gange i løbet af et sekund. Det skyldes at forskellen i Hz mellem de to toner netop er 3 Hz.

Dette kaldes en *stødtone* eller *svævning.*

Den matematiske forklaring af dette finder vi i de såkaldt logaritmiske formler for cosinus og sinus:

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \cos(\frac{x-y}{2}) \cdot \sin(\frac{x+y}{2})$$

Beviset finder du på side 3.

I en let omformuleret udgave, der direkte kan omsættes til et mere musiknært sprog, får vi:

$$\sin(x \cdot 2\pi) + \sin(y \cdot 2\pi) = 2 \cdot \cos(\frac{x-y}{2} \cdot 2\pi) \cdot \sin(\frac{x+y}{2} \cdot 2\pi)$$

Formlen siger, at hvis vi lægger en svingning på *x* Hz oveni en svingning på *y* Hz, så vil vi få en hurtig svingning på den gennemsnitlige frekvens

$$\frac{x+y}{2}Hz$$

Men tonen vil have en amplitude, der langsomt svinger op og ned med en frekvens på halvdelen af forskellen på de to frekvenser:

$$\frac{x-y}{2}Hz$$

Da en sådan svingning har to ”toppe” vil det høres som (x-y) stød pr sekund på den ”fælles” tone.

Teknikken bruges til at stemme f.eks. guitarer og el-basser. Her slå man de to strenge an, men lytter ikke så meget efter om tonerne er ens, men i stedet om man kan gøre svævningen mellem de to toner så langsom, at den ikke kan høres.

Teknikken bruges også af klaverstemmere, når de skal sikre sig at en kvint er ”falsk på den rigtige måde”.

I en lidt mere sammensat form, er det også det vi oplever, når vi fx hører at en tempereret kvint står og “dirrer”. Det skyldes et sammenstød mellem nogle af overtonerne.

Hvis tonen C_0 har frekvensen 261.6 Hz og tonen G_0 er den tempererede kvint på

$$261.6\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 392.1 \text{ Hz}$$

Så vil disse toner få følgende partialtoner:

1.	C_0	261.6 Hz	G_0	392.1 Hz
2.	C_1	523.2 Hz	G_1	**784.2 Hz**
3.	G_1	**784.8 Hz**	D_2	1176.3 Hz
4.	C_2	…	G_2	…
5.	E_2	…	H_2	…

Når vi spiller den tempererede kvint C_0 G_0, så vil vi få svævning mellem C-tonens tredje og G-tonens anden partialtone. Forskellen vil være på 0.6 Hz, og dermed vil det høres som ca. 0.6 stød pr sekund.

Da der samtidig ligger mange andre toner oveni, vil vi ikke, som grafen ovenfor antyder, opleve at lyden helt forsvinder mellem disse stød. Man vil snarere opleve det som styrken af tonen eller klangen af tonen bare ændres lidt.

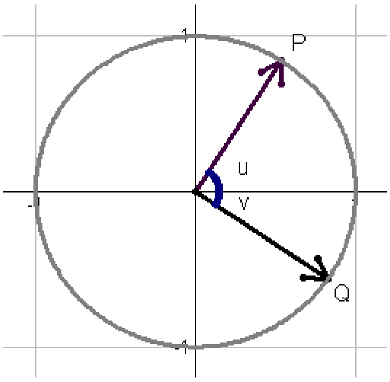
Udregn antal stødtonerne pr sekund for hver af kvinterne D_0-A_0 G_0-D_1 H_0-$F\#_1$ i en ligesvævende stemning. Kan du ud fra det sige noget om, hvordan antal stødtoner for en kvint vil ændre sig, når grundtonen flyttes fra C_0 og op mod C_1.

Nogle har foreslået, at benytte en stemning hvor stødene er ens hele vejen op i oktaven. Hvilken uheldig egenskab vil der være ved sådan en stemning? (Tip: Hvor mange stød pr sekund vil der være i oktaven over?)

Bevis for den logaritmiske formel:

Logaritmisk formel

$$\sin(x)+\sin(y)=2\cdot\sin(\frac{x-y}{2})\cdot\cos(\frac{x+y}{2})$$



Formlen har fået tilnavnet ”logaritmisk” fordi den ændrer ”gange” til ”plus”. Undervejs skal vi bevise de såkaldte additionsformler, der udtaler sig om sinus og cosinus af u+v og u-v ud fra kendskab til værdierne for u og v.

Lad P og Q være to punkter på enhedscirklen. Vinklen u er vinklen fra x-aksen til $\overrightarrow{OP}$ i *positiv retning*. Vinklen v er vinklen fra x-aksen til $\overrightarrow{OQ}$ i *negativ retning*.

Derved vil vektorerne få koordinatsættene:

$$\overrightarrow{OP}=(\cos(u),\sin(u))$$

og

$$\overrightarrow{OQ}=(\cos(-v),\sin(-v))=(\cos(v),-\sin(v))$$

Her har vi benyttet overgangsformlerne der siger

cos(-*u*)=cos(*u*) og sin(-*u*)=-sin(*u*).

Nu udregner vi det($\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP}$) ud fra formlen om vinklen mellem vektorer og determinanten.

$$\det(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP})=\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\sin(v+u)$$

Hvor vi udnytter at vinklen *fra* $\overrightarrow{OQ}$ til $\overrightarrow{OP}$ netop er v+u. Da de to vektorer samtidig har længden 1 følger

$$\det(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP})=\sin(v+u)$$

Kigger vi derefter på determinanten udregnet ud fra koordinaterne får vi

$$\det(\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OP})=\begin{vmatrix}\cos(v) & \cos(u)\\ -\sin(v) & \sin(u)\end{vmatrix}=$$

$$\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$$

Og dermed følger at

$$\sin(u+v)=\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$$

Alle disse overvejelser passer ligegyldig *u* og *v*’s fortegn, og derfor kan vi indsætte (-*v*) i stedet for *v*

$$\sin(u+(-v))=\sin(u)\cdot\cos(-v)+\cos(u)\cdot\sin(-v)$$

Dette kan omskrives til

$$\sin(u-v)=\sin(u)\cdot\cos(v)-\cos(u)\cdot\sin(v)$$

Hermed har vi vist to af *additionsformlerne*. De sidste to bevises ved at se på skalarproduktet mellem de to vektorer. Vi springer beviset over her, fordi vi ikke skal bruge den del af sætningen, men hele sætningen siger altså:

Additionsformlerne for sinus og cosinus:

$$\sin(u+v)=\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$$
$$\sin(u-v)=\sin(u)\cdot\cos(v)-\cos(u)\cdot\sin(v)$$
$$\cos(u+v)=\cos(u)\cdot\cos(v)+\sin(u)\cdot\sin(v)$$
$$\cos(u-v)=\cos(u)\cdot\cos(v)-\sin(u)\cdot\sin(v)$$

Vi lægger henholdsvis venstresiderne og højresiderne sammen i

$$\sin(u+v)=\sin(u)\cdot\cos(v)+\cos(u)\cdot\sin(v)$$
$$\sin(u-v)=\sin(u)\cdot\cos(v)-\cos(u)\cdot\sin(v)$$

Dermed følger

$$\sin(u+v)+\sin(u-v)=2\cdot\sin(u)\cdot\cos(v)$$

Og denne formel minder jo en del om vores situation, nemlig at vi gerne vil se hvad der sker når vi lægger to sinus-funktioner sammen. I stedet for u+v ville vi bare gerne have x og i stedet for u-v ville vi gerne have y

$$u+v = x \quad \text{og} \quad u-v = y$$

Lægger vi de to ligninger sammen hver side for sig får vi $2u = x+y$ og trækker vi den nederste fra den øverste, hver side for sig følger $2v = x-y$. Dermed har vi

$$u=\frac{x+y}{2} \qquad v=\frac{x-y}{2}$$

Indsættes dette nu i

$$\sin(u+v)+\sin(u-v)=2\cdot\sin(u)\cdot\cos(v)$$

følger

$$\sin(x)+\sin(y)=2\cdot\sin(\frac{x+y}{2})\cdot\cos(\frac{x-y}{2})$$

Det var den sætning vi ville vise.

I vores konkrete tilfælde kan vi formulere den som (vi bytter om på rækkefølgen for at få ”amplituden” samlet):

$$\sin(2\cdot\pi\cdot f_1\cdot x)+\sin(2\cdot\pi\cdot f_2\cdot x)=$$

$$2\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot\frac{f_1-f_2}{2})\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot\frac{f_1+f_2}{2})$$

Vi har altså lagt en tone med frekvensen f_1 sammen med en tone med frekvens f_2, og det vi får er en tone med en frekvens der er gennemsnittet af de to frekvenser

$$\sin(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1 + f_2}{2})$$

men med en amplitude (dvs en lydstyrke), der svinger med frekvensen f_1-f_2

$$2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \frac{f_1 - f_2}{2})$$

Da en svingning når ”toppen” en gang og ”bunden” en gang i løbet af en periode, så vil den støde dobbelt så mange gange som forskellen i frekvens.

Fx vil en tone på 320 og en tone på 322Hz spillet samtidig lyde som en tone på 321Hz, men den vil ikke stå som en stillestående klang. Den vil ”støde” 4 gange i sekundet.