Geometrisk ekskurs: Mersenne's tilnærmede værdi for den ligesvævende kvint

Marin Mersenne (1588-1648) er en fransk matematikker, filosof, teolog og musik-teoretiker. Foreslår at man bruger størrelsen

$$q := \sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}$$

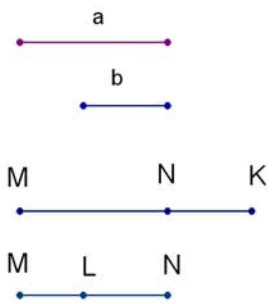
som frekvensforholdet for en halvtone. Hvor meget afviger den fra den ligesvævende halvtone?

Da frekvensen er omvendt proportional med frekvensen (dobbelt så lang streng har den halve frekvens), så kan vi bestemme en streng, der har overstående frekvensforhold, ved at afkorte den svingende streng til længden:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}} \cdot (\text{oprindelig længde})$$

En speciel ting ved dette forhold er, at det faktisk kan konstrueres med passer og lineal.

At dette er tilfældet, skal vi se på i det følgende:



Vi kan med passer og lineal konstruere sum og differens af alle afstande vi kender

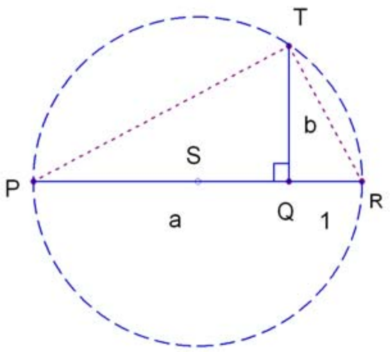
Det er klart at vi kan afsætte to længder enten i forlængelse af hinanden eller afsætte den sidste i "modsat retning", så vi får konstrueret

$a + b$ og $a - b$

Dermed kan vi også konstruere

$a+a = 2a$ $\quad a+a+a = 3a$ $\quad a+a+a+a = 4a$ osv.

Vi kan konstruere kvadratroden af et tal på følgende måde:



Afsæt liniestykket PQ så længden er a. Afsæt punktet R i forlængelse så QR=1.

Bestem midtpunktet S på PR, og tegn cirklen med centrum i S og radius SR.

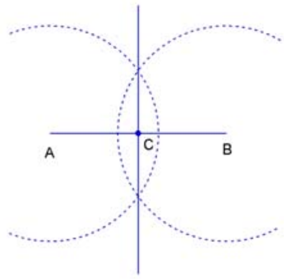
Oprejs den vinkelrette fra punktet Q og marker skæringspunktet T, der er skæringen mellem cirkel og den lodrette linie.

Så vil længden b=TQ= $\sqrt{a}$

Argumentet for at dette gælder, er i kort form: vinkel *PTR*, er en såkaldt periferivinkel, der har alle punkter på en cirkelperiferi. Om den gælder der, at den har en vinkel, der er halvt så stor som den del af cirklen den spænder over. Da den spænder over 180° og dermed er vinkel *PTR* 90°. Ser vi på trekant *PTR* så vil vinkel *P* og vinkel *R* tilsammen give 90°. Betragter vi trekant *PTQ* vil vinkel P + vinkel *PTQ* også give 90°, og dermed må vinkel *R* = vinkel *PTQ*. Dermed er trekant *PTR* ensvinklet med trekant *PQT* og ud fra samme type argument også med trekant *TQR* Dermed følger

$$\frac{PQ}{QT} = \frac{QT}{QR} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{a}$$

Vi kan halvere en længde på følgende måde:



Afsæt længden d som liniestykket *AB*, og afsæt en cirkel med centrum i A og radius, der er større end halvdelen af AB. Tegn en cirkel med samme radius med centrum i B. Linien gennem cirklernes skæringspunkter vil være *midtnormalen,* og den halverer liniestykket AB.

Vi har altså, at AC har længden *d*/2.

Konstuktionen af Mersenne's tilnærmede værdi for den ligesvævende kvint
Vi kan nu konstruere den tilnærmede værdi for den ligesvævende kvin:

Afsæt en længde 1, der er 1/3 af bredden af dit papir. Nu kan vi du altså selv prøve at konstruere størrelsen

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}}$$

- Start med at afsætte/konstruere tallene 2 og 3 på en vandret linie nederst på dit A4-ark.
- Konstruer så tallet $\sqrt{2}$.
- Konstruer tallet $3-\sqrt{2}$.
- Halver dette tal så du får ($3-\sqrt{2}$)/ 2.
- Konstruer $\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$ og derefter $\sqrt{\sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}}}$