



Ligninger

Eksempel 1.

Et eksempel på en ligning er $2x - 4 = 10$

En ligning er et matematisk udtryk hvor der indgår et lighedstegn. I en ligning indgår der et bogstav, en ukendt størrelse/variabel. Dette bogstav er ofte x og kaldes for **den ubekendte**. Dette x er et ukendt tal som vi skal finde således at lighedstegnet gælder, vi siger at **x skal isoleres** for at løse ligningen (for at finde det tal x kan være). Lad os isolere x i ligningen ovenfor:

$$2x - 4 = 10$$

$$2x - 4 + 4 = 10 + 4$$

$$2x = 14$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$$

$$\underline{x = 7}$$

Vi har isoleret x ved at lægge 4 til på begge sider af lighedstegnet og ved at dividere med 2 på begge sider af lighedstegnet.

Dette vil vi kalde **regneoperationer**, som vi foretager for at isolere x .

Ligningens løsning er 7, dvs. når $x = 7$ gælder lighedstegnet i ligningen foroven. Lad os kontrollere dette $2 \cdot 7 - 4 = 10$ dvs. $10 = 10$ dvs. lighedstegnet gælder. Tallet 7 er den eneste løsning og man kan så skrive at $x = 7$.

Regneoperationer for at løse ligninger

- Lægge (+) det samme tal til på begge sider af lighedstegnet
- Trække (−) det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet.
- Gange (·) med det samme tal på begge sider af lighedstegnet, blot tallet ikke er 0.
- Dividere (:) med det samme tal på begge sider af lighedstegnet, blot tallet ikke er 0.

Regneoperationerne plus og minus er hinandens **omvendte regneoperation** og at gange og dividere er hinandens omvendte regneoperation.

Når der står -4 i ligningen ovenfor på den side, hvor x 'erne er, kan vi fjerne -4 ved at lægge 4 til på begge sider af lighedstegnet for så vil -4 og $+4$ give 0.

Når der står $2x$ på den ene side af lighedstegnet i ligningen ovenfor, er x ganget med 2. For at fjerne dette 2-tal skal vi altså dividere med 2 på begge sider af lighedstegnet.

Eksempel 2.

$$6x - 12 = 9x + 5$$

$$-12 = 3x + 5$$

$$-17 = 3x$$

$$-\frac{17}{3} = x$$

Vi samler x 'erne på højre side da der her er 9 x 'er mens der på venstreside kun er 6 x 'er. Så vi trækker $6x$ fra på begge sider af $=$.
Så er der ingen x 'er på venstre side og 3 x 'er på højre side.
Vi vil fjerne 5-tallet så vi trækker 5 fra på begge sider af $=$.
Vi vil fjerne 3-tallet så vi dividerer med 3 på begge sider af $=$.



Når vi har fået lidt træning i at løse ligninger kan vi springe nogle af mellemregningerne over. Vi starter altid med at opskrive ligningen fra opgaveteksten og så skal der mindst en linje/mellemregning for hver regneoperation vi udfører.

Eksempel 3.

$$7x - 5 = 10 + 4x$$

$$7x - 5 - 4x = 10 + 4x - 4x$$

$$3x - 5 = 10$$

$$3x - 5 + 5 = 10 + 5$$

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Som kort kan skrives:

$$7x - 5 = 10 + 4x$$

$$3x - 5 = 10$$

$$3x = 15$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Rækkefølgen på regneoperationerne

I princippet er rækkefølgen, hvormed du foretager regneoperationerne ligegyldig, men nogle måder er ofte nemmere end andre. Det er ofte en god idé med følgende rækkefølge:

1. Ved at lægge til og/eller trække fra på begge sider af lighedstegnet kan du samle x'erne på den ene side af lighedstegnet (den side, hvor der er flest x'erne for så undgår du senere at skulle dividere med et negativt tal) og konstanterne ("tal uden x'er på") på den anden side af lighedstegnet.
2. Herefter kan man isolere x ved at dividere på begge sider af lighedstegnet med tallet der er ganget med x.

Eksempel 4.

En måde

$$4x + 7 = 19 \quad \text{trækker 7 fra på begge sider af "="}$$

$$4x = 12$$

$$\underline{\underline{x = 3}} \quad \text{dividerer med 4 på begge sider af "="}$$

En anden måde (klodset)

$$4x + 7 = 19$$

dividerer med 4 på begge sider af "="

*

$$x + \frac{7}{4} = \frac{19}{4}$$

$$x + 1,75 = 4,75$$

trækker 1,75 fra på begge sider af "="

$$\underline{\underline{x = 3}}$$

*: Bemærk at når du ganger/dividerer med et tal på begge sider af lighedstegnet skal alle led på begge sider ganges/divideres med tallet.



At gøre prøve

”At gøre prøve” betyder at kontrollere rigtigheden af den løsning, du har fundet. Dette gør du ved at indsætte løsningen i den oprindelige ligning, og se om lighedstegnet gælder. Hvis de to sider af ”=” er ens er løsningen rigtig. Hvis de to sider af ”=” ikke er ens er løsningen forkert og så har du lavet en fejl, som du må prøve at finde.

Eksempel 5.

$$x - 4 = 14 + 5x$$

$$-4 = 14 + 5x$$

$$10 = 5x$$

$$\underline{\underline{2 = x}}$$

Gør prøve:

$$2 - 4 = 14 + 5 \cdot 2$$

$$2 - 4 = 14 + 10$$

$$-2 = 24$$

Dette er ikke sandt, så vi har lavet en fejl. Prøv om du kan finde den?

Opgave 1.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 5x + 50 = 125$$

$$2. \quad 2 + 4x = 12$$

$$3. \quad 7 = 3x - 11$$

Opgave 3.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 2x + 4 = 5x - 8$$

$$2. \quad 3x + 7 = 8x + 23$$

$$3. \quad 8x - 4 = 2x + 30 + 2$$

Opgave 5.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 8x - 3 = 0$$

$$2. \quad 9x = 0$$

$$3. \quad 12 + 4x = 7x$$

Opgave 2.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 1 + 3x + 14 = 7$$

$$2. \quad 20x - 400 = 440$$

$$3. \quad 16 + 12x = 16x$$

Opgave 4.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 7 - 3x = 8 + 14$$

$$2. \quad 6 + 7x = 1 + 3x$$

$$3. \quad 2x - 1 = 7x + 16$$

Opgave 6.

Løs ligningerne:

$$1. \quad 0,5x + 4,5 = 8$$

$$2. \quad 40 + 7x = -2$$

$$3. \quad 0,3x + 1,4 = 0,6x - 0,4$$



Ligninger med brøker og parenteser

Hvis der indgår en brøk i ligningen, så er det altid en god idé, at du ganger med nævneren (det som står for neden i brøken) på begge sider af lighedstegnet, for så forsvinder brøken.

Eksempel 6.

Vi løser en ligning med en brøk:

$$6 + \frac{15}{x} = 11 \quad \text{trækker 6 fra på begge sider af lighedstegnet}$$

$$\frac{15}{x} = 5 \quad \text{ganger med } x \text{ på begge sider af lighedstegnet}$$

$$15 = 5x \quad \text{dividerer med 5 på begge sider af lighedstegnet}$$

$$\underline{\underline{3 = x}}$$

I et regneudtryk er leddene adskilt af + og -. F.eks. er der her 4 led: $x^5 - 3x^2 + 4x - 2$.
Man ganger et tal ind i en parentes ved at gange tallet på hver led i parentesen.

Eksempel 7. $2 \cdot (3x - 4) = 2 \cdot 3x - 2 \cdot 4 = 6x - 8$

Eksempel 8. $-5 \cdot (5 - 4x) = -5 \cdot 5 - 5 \cdot 4x = 25 + 20x$

Eksempel 9.

Vi løser en ligning med en parentes:

$$2 - 4(2x - 5) = 14 \quad \text{trækker 2 fra på begge sider af lighedstegnet}$$

$$-4(2x - 5) = 12 \quad \text{ganger } -4 \text{ ind i parentesen}$$

$$-8x + 20 = 12 \quad \text{trækker 20 fra på begge sider af lighedstegnet}$$

$$-8x = -8 \quad \text{dividerer med } -8 \text{ på begge sider af lighedstegnet}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Opgave 7.

Bestem en løsning til ligningerne:

1. $5 - 5(x - 5) = 70$

2. $12(12 + 3x) = 24x$

3. $2x - 4(4 - 2x) = 4$

Opgave 8.

Bestem en løsning til ligningerne:

1. $\frac{3-2x}{4} = x$

2. $2 + \frac{33-x}{3} = 3$

Opgave 9.

Bestem en løsning til ligningerne:

1. $\frac{1}{4}(x + 2) = x$

2. $\frac{1}{4}x + 2 = x$



Formler

Arealet (T) af en trekant kan beregnes ved $\frac{1}{2}$ gange højden (h) gange grundlinien (g) så vi har altså formelen $T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Formlen er bekvem, hvis vi kender trekantens højde og grundlinie og skal beregne arealet. Hvis vi i stedet kender areal (T) og grundlinien (g) og ønsker at beregne højden (h), kan vi omforme formelen, så det er h der står alene (isolere h).

Eksempel 10.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot h \cdot g && \text{ganger med 2 på begge sider af} \\ 2T &= h \cdot g && \text{dividerer med g på begge sider af "="" } \\ \frac{2T}{g} &= h \end{aligned}$$

Eksempel 11.

Isoler x:

$$\begin{aligned} n \cdot x + 4 &= k && \text{trækker 4 fra på begge sider af "="" } \\ n \cdot x &= k - 4 && \text{dividerer med n på begge sider af "="" } \\ x &= \frac{k - 4}{n} \end{aligned}$$

Isolere s:

$$\begin{aligned} r \cdot s - 4t &= r \cdot k && \text{rækker 4t fra på begge sider af "="" } \\ r \cdot s &= r \cdot k + 4t && \text{dividerer med r på begge sider af "="" } \\ s &= \frac{r \cdot k + 4t}{r} \end{aligned}$$

Opgave 10.

- Isoler p i formlen $y = 2\pi \cdot p + q$
- Isoler p i formlen $Q = s \cdot p$

Opgave 11.

- Isoler x i formlen $y = a \cdot x + b$
- Isoler x i formlen $7 = \frac{a}{x} + 2$

Opgave 12.

$$\begin{aligned} \text{Isoler c i formlen } b &= \frac{a}{c} \\ \text{Isoler a i formlen } \frac{a}{a_1} &= \frac{c}{c_1} \\ \text{Isoler k i formlen } a \cdot k &= a_1 \end{aligned}$$

Opgave 13.

- Isoler a i formlen $a^2 + b^2 = c^2$
- Isoler c i formlen $a^2 + b^2 = c^2$

Opgave 14 (svær).

- Isoler K_0 i formlen $K = K_0(1+r)^n$
- Isoler r i formlen $K = K_0(1+r)^n$



Optakt til lineære modeller

Opgave 16.

Hannibal skal købe nogle sodavand og én plastikpose. En sodavand koster 7 kr. og én plastikpose koster 3kr. Lad x være det antal sodavand Hannibal køber og lad p være prisen for disse sodavand og posen.

Udfyld tabellen:

Antal sodavand: x	1	2	3	4
Samlet pris: p				

Opskriv en formel til beregning af p .

Anvend formlen til at beregne prisen p for 11 sodavand.

Anvend formlen til at beregne hvor mange sodavand Hannibal kan købe for 124 kr.

Opgave 17.

I en taxa er der et startgebyr på 34 kr. og hver kørt km koster 12,50 kr. Lad p være prisen for en taxatur på x km.

Opskriv en formel til beregning af p .

Anvend formlen til at beregne prisen p for en taxatur på 20 km.

Anvend formlen til at beregne længden x for en taxatur til 159 kr.

Opgave 18.

Pia vejer 3500 gram ved fødslen. I starten af sit liv tager hun 50 gram på om dagen. Lad v være Pias vægt x dage efter hun er født.

Opskriv en formel til beregning af v .

Anvend formlen til at beregne hvor mange dage Pia har levet, når hun vejer 4200 gram.

Isoler x i formlen for v .

Opgave 19.

En snor på 32 cm klippes over et tilfældigt sted. Længden af snorstykket til højre kalder vi y og snorstykket til venstre klippes over på midten og længden af ét af disse snorstykker kalder vi x .

Opskriv en formel til beregning af y .

Isoler x i formlen.

Facitliste

1	15	2,5	6	4	-5	-5/4	-3	7	8	-12	2
2	-8/3	42	4	5	3/8	0	4	8	1/2	30	
3	4	16/5	6	6	7	6	6	9	2/3	8/3	