

SSO: matematik B

Karakter: 12

Tallet π

Du skal kort omtale oldtidens ægyptiske og babyloniske værdier for π .

Gør rede for Archimedes' metode til bestemmelse af π .

Forklar hvordan π kan beregnes ved brug af arctan-rækker.

Du skal desuden løse nedenstående opgaver. Du vælger selv, hvordan du vil integrere disse opgaver i din besvarelse.

Opgave 1:

Beregn π med 5 decimalers nøjagtighed med Archimedes' metode.

Opgave 2:

Beregn π med 6 decimalers nøjagtighed ved hjælp af arctan-rækker og udtrykket:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Abstract

This assignment deals with π . The assignment begins by giving an account of the Egyptian and the Babylonian value for π . Next it gives an account of Archimedes and his methods to the determination of π . A lot of Archimedes' formulas, to help him determine π , are proven with a lot of words and figures.

The assignment also tries to explain how arctan-rows can calculate π with a self-specified number of decimals.

It also deals with π as a irrational and transcendent number.

Finally, the assignment solves those two tasks given in the assignment, using the evidences given above. The assignment comes to the conclusion that the methods for many years have been developed, to make it easier for a normal human being to figure out what π really is.

Indhold

Indledning.....	1
Den ægyptiske værdi for π	2
Den babyloniske værdi for π	4
Archimedes' metode til bestemmelse af π	4
Opgave 1	12
Beregning af π ud fra arctan-rækker	17
Opgave 2	20
π , et irrationelt og transcendent tal	21
Konklusion	22
Litteraturliste	24
Bilag	25
Bilag 1	25
Bilag 2	26
Bilag 3	26
Bilag 4	27
Bilag 5	27
Bilag 6	28

Indledning

Jeg har valgt at skrive om π .

Da jeg hørte om at man før Kristi fødsel havde kunnet regne på π begyndte det at interessere mig lidt. Efter at have læst lidt på det, har jeg så fundet ud af at det var Archimedes der brød igennem i forhold til udregning af π . Hans metode til at finde π blev brugt i mellem 18 og 1900 år efter han opfandt den, og jeg vil næsten tro at det er umuligt at opfinde noget nu, der om bare 1000 år ikke er videreudviklet, så det er blevet langt smartere at bruge. Derfor har jeg også valgt at størstedelen af denne opgave handler om Archimedes' metode til udregning af π .

Udover jeg har skrevet en del om Archimedes metode, har jeg også kommet en lille smule ind på både oldtidens ægyptiske og oldtidens babyloniske værdier for π .

Endvidere har jeg skrevet lidt om arctan-rækker (uendelige rækker), som f.eks. på meget mindre udregninger, kan regne mange flere decimaler af π , end Archimedes' metode kunne. Det sidste jeg har skrevet lidt om er irrationale og transcendent tal i sammenhæng med π .

Det meste af opgaven har jeg taget udgangspunkt i bogen " π " af Torben Svendsen, men udover dette har jeg også lavet en del regnearbejde selv, samt de opgaver jeg er blevet stillet i problemformuleringen.

Den ægyptiske værdi for π ¹

Papyrus Rhind hedder det ældste matematiske skrift vi har. Det blev fundet i 1858 ved Theben af den skotske historiker Henry Rhind. Rullen er skrevet af den ægyptiske matematiker Ahmes 1650 f.Kr. og er 556x33 cm.

Papyrusen indeholder 84 forskellige matematiske problemer med løsninger hvoraf problem 41 og 48 omhandler cirkelns areal.

I problem 41 har Ahmes fundet frem til at en cirkels areal kan udregnes ved hjælp af denne formel:

$$A = (d - \frac{1}{9}d)^2 = \frac{64}{81}d^2 \text{ hvor } A=\text{areal og } d=\text{diameter.}$$

Hvis vi sætter denne formel op i mod vores egen moderne: $A = \pi * r^2$ som er det samme som: $A = \frac{1}{4}\pi d^2$ får vi denne ligning:

$$\frac{64}{81}d^2 = \frac{1}{4}\pi g * d^2 \text{ hvor } \pi g \text{ er den ægyptiske værdi for } \pi.$$

Herfra bliver der divideret med d^2 på begge sider, og derefter bliver der ganget med 4 på begge sider, hvilket giver:

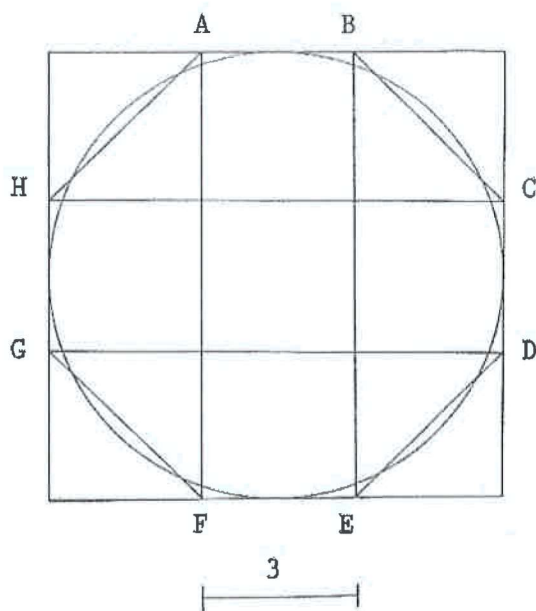
$$\pi g = \frac{256}{81} \approx 3,16049$$

Så deres værdi for π var altså med 1 decimals nøjagtighed.

I problem 48 kan vi se hvordan de er kommet frem til denne værdi.

De har tegnet en cirkel med diameteren 9, herefter er cirklen blevet omskrevet af et kvadrat. Kvadratet er så blevet opdelt i 9 lige store kvadrater hvoraf de 4 hjørner er opdelt i 2 trekanter. (figur følger)

¹ I det følgende afsnit vil jeg tage udgangspunkt i: Svendsen, Torben "π" s. 8-10. Systime a/s 1992



(Se bilag 1)

Der er 5 kvadrater med et areal på 9 og 4 trekanter med et areal på 4,5, dette giver i alt et areal på 63, som er ottekantens areal. Ahmes antager fejlagtigt at ottekantens areal er lig med cirkelns areal, selvom han godt ved at cirkelns areal er størst. For at ophæve denne fejl laver han en anden fejl som er at sætte $63=64$.

Hvis Ahmes satte diameteren 9, ind i sin formel $A = (d - \frac{1}{9}d)^2$ ville det blive 64, og det er så på denne måde han er kommet frem til sin formel.

64 er som bekendt lig med 8^2 . Så hvis vi satte 9 ind på d's plads og $A=8^2$, kan vi igen udregne πg :

$$\frac{1}{4}\pi g * 9^2 = 8^2, \text{ ganger med 4 og dividerer med } 9^2 \text{ på begge sider giver}$$

$$\frac{256}{81} \approx 3,16049 \text{ præcis ligesom tidligere.}$$

$$\text{Linjen } AD = \frac{1}{2}K_n - \frac{1}{2}K_{2n}$$

Og til sidst har vi DC som er $\frac{1}{2}K_{2n}$

Nu når jeg har givet alle siderne en matematisk betegnelse kan vi skrive dette ind i

$$\text{vores formel } \frac{AD}{DC} = \frac{OA}{OC}$$

$$\frac{\frac{1}{2}K_n - \frac{1}{2}K_{2n}}{\frac{1}{2}K_{2n}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2}}{1} \text{ et hvilket som helst tal } t \text{ divideret med } 1 \text{ er lig med } t, \text{ så } 1\text{-tallet}$$

kan derfor fjernes

$$\frac{\frac{1}{2}K_n - \frac{1}{2}K_{2n}}{\frac{1}{2}K_{2n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2} \text{ nu forlænger vi brøken på venstre side af lighedstegnet med } 2$$

$$\frac{K_n - K_{2n}}{K_{2n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2} \text{ så ganger vi med } K_{2n} \text{ på begge sider}$$

$$K_n - K_{2n} = K_{2n}\sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2} \text{ så plusser vi med } K_{2n} \text{ på begge sider}$$

$$K_n = K_{2n} + K_{2n}\sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2} \text{ for at isolere } K_{2n} \text{ vil vi kun have det fremkommer en gang i formlen, derfor sætter vi det uden for en parentes}$$

$$K_n = K_{2n}(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2}) \text{ nu dividerer vi så hele den store parentes over på den anden side}$$

$$K_{2n} = \frac{K_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}K_n^2}} \text{ så forlænger vi brøken med } 2 \text{ for at der ikke skal stå } \frac{1}{4}K_n^2$$

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} 2 * 1 = 2 \text{ og } 2 = \sqrt{4} \text{ derfor}$$

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ og vi ved ligesom sidst at } \sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{a * b} \text{ derfor får vi}$$

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ og beviset er hermed færdigt.}$$

Det var med disse formler som er bevist ovenfor, Archimedes beregnede sig frem til sin værdi for π .

Han kunne selvfølgelig ikke regne med decimal-tal, men ved hjælp af sine metoder blev hans endelige resultat $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{22}{7}$ hvilket svarer til $3,1408 < \pi < 3,1429$ det vil sige hans værdi for π var med 2 decimalers nøjagtighed, hvilket må siges at være

meget godt taget i betragtning af at det ca. er 2300 år siden, og at man for eksempel i folkeskolerne regner π som 3,14.

For at Archimedes kunne nå frem til denne nøjagtighed måtte han komme op på 96 kanter i hans ind- og omskrevne n -kanter, og uden nogen form for lommeregner er det meget avanceret.

Man kan også se hvor banebrydende hans metode var, ved at se på hvor mange år frem i tiden den er blevet brugt. Folk har brugt og videreudviklet hans metode helt op I 1600 tallet. Det er først sidst i 1600, tallet Isaac Newton og Gotfried Leibniz begge udvikler differential- og integralregningen, som også har noget at gøre med uendelige rækker, hvilket jeg kommer nærmere ind på i et senere afsnit.

Nu hvor jeg har vist hvordan Archimedes prøvede at udregne π , mener jeg det er passende at lave **opgave 1** fra problemformuleringen der lyder på følgende måde:

Beregn π med 5 decimalers nøjagtighed med Archimedes' metode.

Jeg starter med at regne 1 led i den indskrevne, et led i den omskrevne, derefter det næste led i den indskrevne og det næste i den omskrevne osv.

Som jeg tidligere har bevist er sidelængden $k_6=1$ og da det er en sekskant skal jeg bare gange sidelængden k_6 med 6

$1 * 6 = 6$ dvs. omkredsen af sekskanten med sidelængderne $k_6=6$

Ligesom med den indskrevne, har jeg regnet sidelængden K_6 ud, den var $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15470 \dots$

Dette ganget med 6 er lig med 6.92820...

Vi ved fra tidligere at $nk_n < 2\pi < nK_n \Leftrightarrow 0,5 nk_n < \pi < 0,5 nK_n$, så for at finde π og ikke 2π , skal jeg dividere omkredsen af både den ind- og omskrevne 6 sekskant med 2, for at få indsnævret π .

$6/2 = 3$ og $6,92820 \dots / 2 = 3.46410 \dots$

Så indtil videre ved vi kun at $\pi = 3, \dots$

Nu skal jeg så til at bruge formlerne for k_{2n} og K_{2n} . Jeg starter igen med den indskrevne.

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ nu indsætter jeg så } k_6 \text{ i formlen.}$$

$$k_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}} = 0,51763 \dots \text{ dette tal skal så ganges med 12, da det er den dobbelte } n\text{-kant, dvs. en 12-kant.}$$

$$0,51763 \dots * 12 = 6,21165 \dots \text{ så dividerer jeg med 2}$$

$$6,21265/2 = 3,10582 \dots$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_6 \text{ i formlen.}$$

$$K_{12} = \frac{2 * 1,15470 \dots}{2 + \sqrt{4 + 1,15470 \dots^2}} = 0,53589 \dots \text{ dette tal skal ligesom før også ganges med 12, da det er den dobbelte } n\text{-kant.}$$

$$0,53589 \dots * 12 = 6,43078 \dots \text{ dividerer med 2}$$

$$6,43078 \dots / 2 = 3,21539 \dots$$

Nu er jeg altså nået frem til følgende:

$$3,1 \dots < \pi < 3,2 \dots$$

Da det er samme procedure jeg skal gentage indtil jeg er kommet frem til de 5 decimalers nøjagtighed, vil jeg i de følgende udregninger ikke forklare så meget som oven over.

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{12}$$

$$k_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,51763 \dots^2}} = 0,26105 \dots \text{ ganger med 24}$$

$$0,26105 \dots * 24 = 6,26525 \dots \text{ dividerer med 2}$$

$$6,26525 \dots / 2 = 3,13262 \dots$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{12}$$

$$K_{24} = \frac{2 \cdot 0,53589...}{2 + \sqrt{4 + 0,53589...^2}} = 0,26330 ... \text{ ganger med } 24$$

$$0,26330 ... \cdot 24 = 6,31931 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,31931 ... / 2 = 3,15965 ...$$

Så nu har jeg:

$$3,13 ... < \pi < 3,15 ...$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{24}$$

$$k_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,26105 ...^2}} = 0,13080 ... \text{ ganger med } 48$$

$$0,13080 ... \cdot 48 = 6,27870 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,27870 ... / 2 = 3,13935 ...$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{24}$$

$$K_{48} = \frac{2 \cdot 0,26330 ...}{2 + \sqrt{4 + 0,26330 ...^2}} = 0,13108 ... \text{ ganger med } 48$$

$$0,13108 ... \cdot 48 = 6,29217 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,29217 ... / 2 = 3,14608 ...$$

Så nu har jeg:

$$3,13 ... < \pi < 3,14 ...$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{48}$$

$$k_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,13080 ...^2}} = 0,06543 ... \text{ ganger med } 96$$

$$0,06543 ... \cdot 96 = 6,28206 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28206 ... / 2 = 3,14103 ...$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{48}$$

$$K_{96} = \frac{2 \cdot 0,13108...}{2 + \sqrt{4 + 0,13108...^2}} = 0,06547 ... \text{ ganger med } 96$$

$$0,06547 ... \cdot 96 = 6,28542 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28542 ... / 2 = 3,14271 ...$$

Så nu har jeg:

$$3,141 ... < \pi < 3,142 ...$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{96}$$

$$k_{192} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,06543 ...^2}} = 0,03272 ... \text{ ganger med } 192$$

$$0,03272 ... \cdot 192 = 6,28290 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28290, ... / 2 = 3,14145 ...$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{96}$$

$$K_{192} = \frac{2 \cdot 0,06547 ...}{2 + \sqrt{4 + 0,06547 ...^2}} = 0,03272 ... \text{ ganger med } 192$$

$$0,03272 ... \cdot 192 = 6,28374 ... \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28374 ... / 2 = 3,14187 ...$$

Så nu har jeg:

$$3,1414 ... < \pi < 3,1418 ...$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{192}$$

$$k_{384} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,03272 \dots^2}} = 0,01636 \dots \text{ ganger med } 384$$

$$0,01636 \dots * 384 = 6,28311 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28311 \dots / 2 = 3,14155 \dots$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{192}$$

$$K_{384} = \frac{2 * 0,03272 \dots}{2 + \sqrt{4 + 0,03272 \dots^2}} = 0,01636 \dots \text{ ganger med } 384$$

$$0,01636 \dots * 384 = 6,28332 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28332 \dots / 2 = 3,14166 \dots$$

Så nu har jeg:

$$3,1415 \dots < \pi < 3,1416 \dots$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{384}$$

$$k_{768} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,01636 \dots^2}} = 0,00818 \dots \text{ ganger med } 768$$

$$0,00818 \dots * 768 = 6,28316 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28316 \dots / 2 = 3,14158 \dots$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{384}$$

$$K_{768} = \frac{2 * 0,01636 \dots}{2 + \sqrt{4 + 0,01636 \dots^2}} = 0,00818 \dots \text{ ganger med } 768$$

$$0,00818 \dots * 768 = 6,28322 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28322 \dots / 2 = 3,14161 \dots$$

Så nu har jeg:

$$3,1415 \dots < \pi < 3,1416 \dots$$

Næste led:

Indskrevne:

$$k_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - k_n^2}} \text{ indsætter } k_{768}$$

$$k_{1536} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 0,00818 \dots^2}} = 0,00409 \dots \text{ ganger med } 1536$$

$$0,00409 \dots * 1536 = 6,28318 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28318 \dots / 2 = 3,14159 \dots$$

Omskrevne:

$$K_{2n} = \frac{2K_n}{2 + \sqrt{4 + K_n^2}} \text{ indsætter } K_{768}$$

$$K_{1536} = \frac{2 * 0,00818 \dots}{2 + \sqrt{4 + 0,00818 \dots^2}} = 0,00409 \dots \text{ ganger med } 1536$$

$$0,00409 \dots * 1536 = 6,28319 \dots \text{ dividerer med } 2$$

$$6,28319 \dots / 2 = 3,14159 \dots$$

Så nu har jeg:

$$3,14159 \dots < \pi < 3,14159 \dots$$

π er altså lig med 3,14159 med fem decimalers nøjagtighed, og hermed er opgaven udført.

Jeg har valgt at skrive med fem decimaler hele vejen igennem da det var med den nøjagtighed π skulle udregnes. Under mine udregninger har jeg brugt TI-nSpire der som standard regner med 11 decimaler.

Beregning af π ud fra arctan-rækker

Måden man udregner π ud fra arctan-rækker, er at man opstiller nogle regneudtryk for π . Eksempler på disse kunne være det udtryk jeg skal bruge i opgave 2 fra problemformuleringen $\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$, andre eksempler kunne være $\frac{\pi}{4} = 2\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{7})$ eller $\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \arctan(\frac{1}{239})$, som var det udtryk William Shanks i 1870'erne brugte til at regne π med 707 decimaler, senere har man fundet ud af at det var forkert fra decimal nr. 527.

Grunden til at man begyndte at bruge disse udtryk i stedet for Archimedes' metode var at man på meget mindre beregninger ville kunne regne sig meget hurtigere frem til flere decimaler af f.eks. π .

Sætning 6⁶ siger at: $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$, $t \in [-1; 1]$

Og den vil jeg nu bevise.⁷

Jeg starter med at sætte $f(t) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$

Dette vil kun give mening hvis t tilhører intervallet $]-1; 1[$, sætningen er egentligt også korrekt når $t=1$ og $t=-1$, det kan bare ikke bevises på denne måde, da ovenstående formel så ikke vil gå i mod noget tal (konvergere mod noget tal).

Det første jeg gør er at gange med t^2 på begge sider, og får

$t^2 * f(t) = t^2 - t^4 + t^6 - \dots$ nu plusser jeg så $f(t)$ med $t^2 * f(t)$ som må være lig med 1

$f(t) + t^2 * f(t) = 1$ jeg sætter $f(t)$ uden for en parentes

$f(t) * (1 + t^2) = 1$ og til sidst isolerer jeg $f(t)$ ved at dividerer parentesen til venstre over på den anden side

$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ nu hvor jeg har vist at $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ og at vi fra før ved at $f(t)$ også er lig med $1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$ må disse to formler være lig hinanden

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Ud fra dette kan vi se at funktionen $F(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots$ er en stamfunktion til $f(t)$, da denne differentieret er lig med $f(t)$.

Sætning 5⁸ (som jeg beviser længere nede) siger at $\arctan(t)$ også er en stamfunktion til $f(t)$. Og når to funktioner er stamfunktion til den samme funktion, må de være ens på nær en konstant K til forskel, dvs.

$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} \dots + K$ da $\arctan(t)$ og $F(t)$ kun kan have K til forskel.

Hvis vi sætter $t=0$ nu, kan vi se at $K=0$ da $\arctan(0)=0$ og dens graf derfor vil være lineær og følge førsteaksen i uendelighed.

⁶ Svendsen, Torben "π" s. 28. Systime a/s 1992

⁷ I dette bevis tager jeg udgangspunkt i Svendsen, Torben "π" s. 28-29 og alt det der ligger bag. Systime a/s 1992

⁸ Svendsen, Torben "π" s. 27. Systime a/s 1992

Bevis for sætning 5⁹ $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$

Vi ved at $\arctan$ er en differentiabel funktion, da det er den omvendte funktion til $\tan$ som er en differentiabel funktion.

Jeg starter med at sætte $y = \tan(x)$ og da $\arctan$ er den omvendte funktion så må følgende gælde

$x = \arctan(y)$ omvendte funktioner har reciprokke afledede funktioner derfor er $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)}$ og da $\tan(x)$ differentieret er $1 + (\tan(x))^2$ kan vi indsætte dette

$\arctan'(y) = \frac{1}{1+(\tan(x))^2}$ som der står oven over startede jeg med at sætte

$\tan(x) = y$ og jeg kan derfor skrive y i stedet for $\tan(x)$

$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ hvis vi så sætter x ind i stedet for y har vi $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ og dermed er beviset færdigt.

Dvs. at hvis vi tager udgangspunkt i den første række fra det udtryk jeg skal bruge i opgave 2 ville vi få:

$$\frac{4}{2} - \frac{4}{3 \cdot 2^3} + \frac{4}{5 \cdot 2^5} - \frac{4}{7 \cdot 2^7} \text{ det ville vi få fordi denne række er af typen } b * \arctan\left(\frac{1}{a}\right)^{10}$$

Det smarte ved de her rækker var jo at man på kort tid kunne regne mange decimaler ud. Der blev derfor udviklet noget man kalder konvergenshastighed af $\arctan$ -rækker.

Dette går ud på at man på forhånd kan regne ud, hvor mange led, altså disse: $\frac{4}{2} - \frac{4}{3 \cdot 2^3}$, man skal regne, for at få resultatet med et bestemt antal decimalers nøjagtighed.

Der er blevet opstillet denne formel: $\frac{b}{(2n+1)a^{2n+1}} < 10^{-d}$ hvor n = antal led, d = hvor mange decimalers nøjagtighed man ønsker og a og b fra den række man skal udregne.

Hvis dette skal gælde skal n være større end både: $\frac{d}{2 \log(a)}$ og $\frac{b-1}{2}$ ¹¹

Så er det bare at indsætte sine værdier i de to formler, og den formel der giver det højeste resultat, går man så ud fra.

⁹ I dette bevis tager jeg udgangspunkt i Svendsen, Torben "π" s. 26-27. Systime a/s 1992

¹⁰ Svendsen, Torben "π" s. 31. Systime a/s 1992

¹¹ Disse formler er fra Svendsen, Torben "π" s. 32. Systime a/s 1992

Nu hvor jeg har forklaret lidt om arctan-rækker vil jeg løse **opgave 2** som er:
Beregn π med 6 decimalers nøjagtighed ved hjælp af arctan-rækker og udtrykket:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Som nævnt tidligere er dette udtryk af typen $b * \arctan\left(\frac{1}{a}\right)$

Dvs. at i den første arctan række er $a=2$ og $b=1$ og i den anden arctan-række er $a=3$ og $b=1$

Først vil jeg finde ud af hvor mange led jeg skal regne, for at få π med 6 decimalers nøjagtighed.

Vi ved at det $(n+1)$ 'ne led $= \pm \frac{b}{(2n+1)a^{2n+1}}$

Og hvis vi skal beregne denne formel med d decimalers nøjagtighed ved vi at

$$\frac{b}{(2n+1)a^{2n+1}} < 10^{-d}$$

Sætning 8 i bogen siger:

Når n er større end både $\frac{d}{2\log(a)}$ og $\frac{b-1}{2}$ er $\frac{b}{(2n+1)a^{2n+1}} < 10^{-d}$

Det første jeg gør er at gange med 4 på begge sider af lighedstegnet, så π står alene.

Dvs. den første række kommer til at hedde $4\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ og den anden kommer til at hedde $4\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$.

Hvis vi starter med den første række, fremgår det nu at $a=2$ og $b=4$, hvis vi indsætter det i vores to formler $\frac{d}{2\log(a)}$ og $\frac{b-1}{2}$ finder vi ud af hvor mange led vi skal regne.

Vi vil have π med 6 decimalers nøjagtighed og indsætter derfor 6 på d 's plads.

$$\frac{6}{2\log(2)} \approx 9,97 \text{ og } \frac{4-1}{2} = 1,5$$

Dvs. for at få π med 6 decimalers nøjagtighed skal vi regne 10 led af første række.

I den anden række kan vi se $a=3$ og $b=4$, det sætter vi så ind i vores to formler $\frac{d}{2\log(a)}$ og $\frac{b-1}{2}$.

Vi indsætter 6, 4 og 3.

$$\frac{6}{2\log(3)} \approx 6,29 \text{ og } \frac{4-1}{2} = 1,5$$

Dvs. i denne række skal vi regne 7 led.

Vi ved fra sætning 6 at rækker af typen $b * \arctan(\frac{1}{a})$ kan udregnes på denne måde:

$$b * (\frac{1}{a} - \frac{1}{3a^3} + \frac{1}{5a^5} - \frac{1}{7a^7}) \dots = \frac{b}{a} - \frac{b}{3a^3} + \frac{b}{5a^5} - \frac{b}{7a^7} \dots$$

Jeg starter med den første række hvor der skulle udregnes 10 led.

Jeg indsætter a og b:

$$\frac{4}{2} - \frac{4}{3 \cdot 2^3} + \frac{4}{5 \cdot 2^5} - \frac{4}{7 \cdot 2^7} + \frac{4}{9 \cdot 2^9} - \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{4}{13 \cdot 2^{13}} - \frac{4}{15 \cdot 2^{15}} + \frac{4}{17 \cdot 2^{17}} - \frac{4}{19 \cdot 2^{19}} =$$

1,854590 ...

Den næste række skulle der regnes 7 led, indsætter a og b

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{3 \cdot 3^3} + \frac{4}{5 \cdot 3^5} - \frac{4}{7 \cdot 3^7} + \frac{4}{9 \cdot 3^9} - \frac{4}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{4}{13 \cdot 3^{13}} = 1.287002 \dots$$

Og som udtrykket sagde, skal jeg nu plusse de to rækker sum sammen:

$$\pi = 1,854590 + 1.287002 = 3,141592$$

Og π er nu beregnet med 6 decimalers nøjagtighed.

Også til denne opgave har jeg brugt TI-nSpire til mine udregninger.

π , et irrationelt og transcendent tal

Det sidste jeg vil gøre i denne opgave er at fortælle lidt om π i forhold til at det er et irrationelt og transcendent tal. Grunden til at jeg mener dette har relevans for min opgave er, som jeg også vil komme ind på, at alle de formler jeg har bevist, er der uendeligt mange led man kan regne ud, hvilket vil sige π er uendeligt. Udover dette mener jeg også at det er vigtigt at forklare lidt om hvad for et tal π egentligt er, som de næste to små afsnit fortæller lidt om. Jeg vil starte med at forklare lidt om irrationalitet.¹²

Alle reelle tal, dvs. tal der kan skrives som et endeligt eller uendeligt decimaltal, kan opdeles i rationale og irrationale tal. Rationale tal, er tal der kan skrives præcist ved

¹² Det følgende er fra Svendsen, Torben " π " s. 34. Systime a/s 1992

enten en brøk eller et decimaltal. Irrationale tal er tal der ikke kan skrives som hverken brøk eller decimaltal, da det har uendeligt mange decimaler.

Alle formlerne vi har set i denne opgave har uendeligt mange led, dvs. at man i en uendelighed kan blive ved med at regne flere decimaler af π . Johann Heinrich Lambert beviste i 1761 at π er et irrationalt tal. Det beviste han ved at sige hvis x er irrational og $x \neq 0$ så er $\tan(x)$ rational. Når $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ og når både 1 og 4 er rationale tal, må π derfor være et irrationalt tal.

Nu vil jeg så forklare om transcendenttal og π .¹³

Udover at alle reelle tal kan opdeles i rationale og irrationale tal, kan de også opdeles i algebraiske og transcendenttal. En definition på et algebraisk tal er at; et tal er algebraisk hvis det er rod i et polynomium med hele koefficienter.

Alle rationale tal er algebraiske og det kan bevises på denne måde:

Et hvilket som helst rationalt tal t skrives som $t = \frac{p}{q}$ hvor både p og q er hele tal.

Hvis vi bruger tallet t i funktionen $f(x) = qx - p$ får vi

$f(t) = qt - p$ vi ved at $t = \frac{p}{q}$ så det indsætter vi på t 's plads

$f(t) = q \frac{p}{q} - p$ q 'erne går ud med hinanden og $p - p = 0$ så

$f(t) = q \frac{p}{q} - p = 0$ derfor må t være algebraisk, og beviset er hermed slut.

Alle ikke algebraiske tal er transcendenttal.

Konklusion

Ud fra denne opgave om π kan jeg først og fremmest konkludere at både ægypterne og babylonerne for over 3500 år siden kom frem til π med 1 decimals nøjagtighed. Ingen af dem prøvede at udregne π , men de var derimod mere interesserede i at udregne arealer. π var derfor integreret i deres formler på en eller anden måde som de ikke interesserede sig for. Vi har i dag med nutidens redskaber og computere fundet frem til den værdi for π der var integreret i lige netop deres formler.

¹³ I dette afsnit tager jeg udgangspunkt i Svendsen, Torben "π" s. 36-37. Systime a/s 1992

Senere mellem 3 og 200 år f.Kr. levede Archimedes, der var den første til virkelig at begynde at udregne π . Hans metode var helt utroligt gennembrydende, og han betegnes i dag som et af verdens største matematiske genier.

Ud fra hans metode kan jeg i dag konkludere, at det tager ufatteligt lang tid at udregne π med mange decimaler, da vi i denne moderne verden har helt andre muligheder, som bl.a. computere. I hans levetid var metoden dog virkeligt langt forud for hans tid. Det kan man se på at det er brugt i omkring 1800 år efter hans død.

I slutningen af 1600-tallet blev hans metode så erstattet af rækkeudviklinger. Disse uendelige rækker kunne nemlig på meget kortere tid udregne π med mange flere decimalers nøjagtighed.

Til sidst kan jeg ud fra de stillede opgaver som jeg har løst, konkludere at måden man udregner π altid vil forbedres. Hvilket f.eks kan ses da to japanske dataloger med computer har udregnet π med 51,5 mia decimaler.¹⁴

14

http://www.denstoredanske.dk/It_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Regning_algebra_og_talteori/pi Besøgt 4/2-12

Litteraturliste

Den store danske. Udgivet af Gyldendal. Internetadresse:

http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Regning,_algebra_og_talteori/pi - Besøgt d. 04.02.2012 (Internet)

Den store danske. Udgivet af Gyldendal. Internetadresse:

http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Matematikens_historie/Archimedes - Besøgt d. 04.02.2012 (Internet)

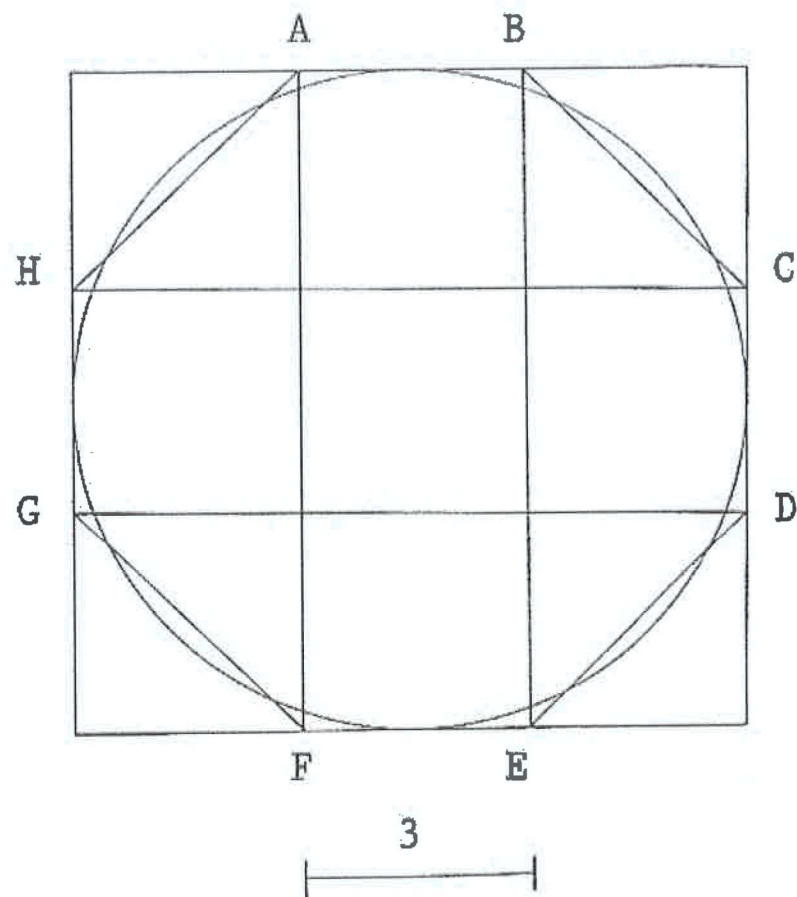
Svendsen, Torben: π . 1. udg. Systime, 1992. (Bog)

TI-nSpire CAS Student Software, Texas Instruments. V. 3.1 (Matematik program)

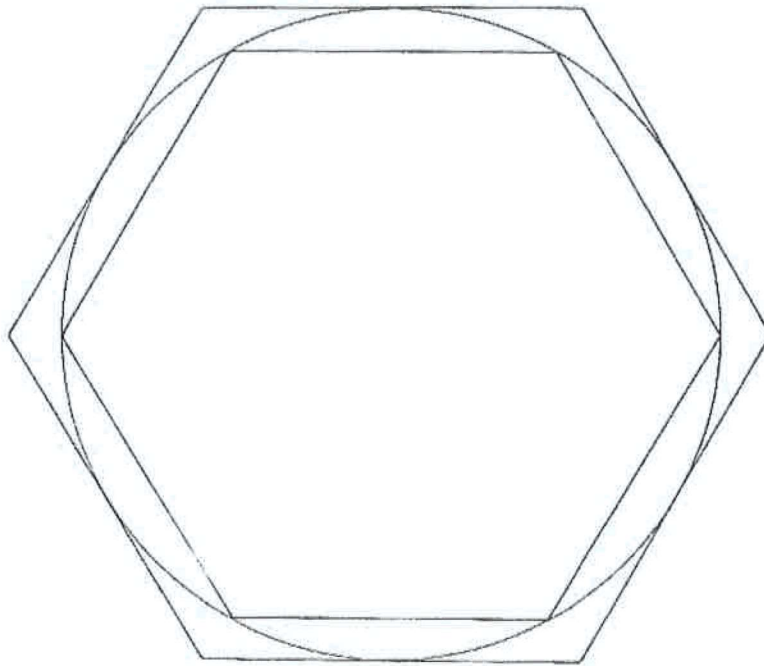
Bilag

Jeg har valgt at vedlægge alle figurer som bilag i et større format.

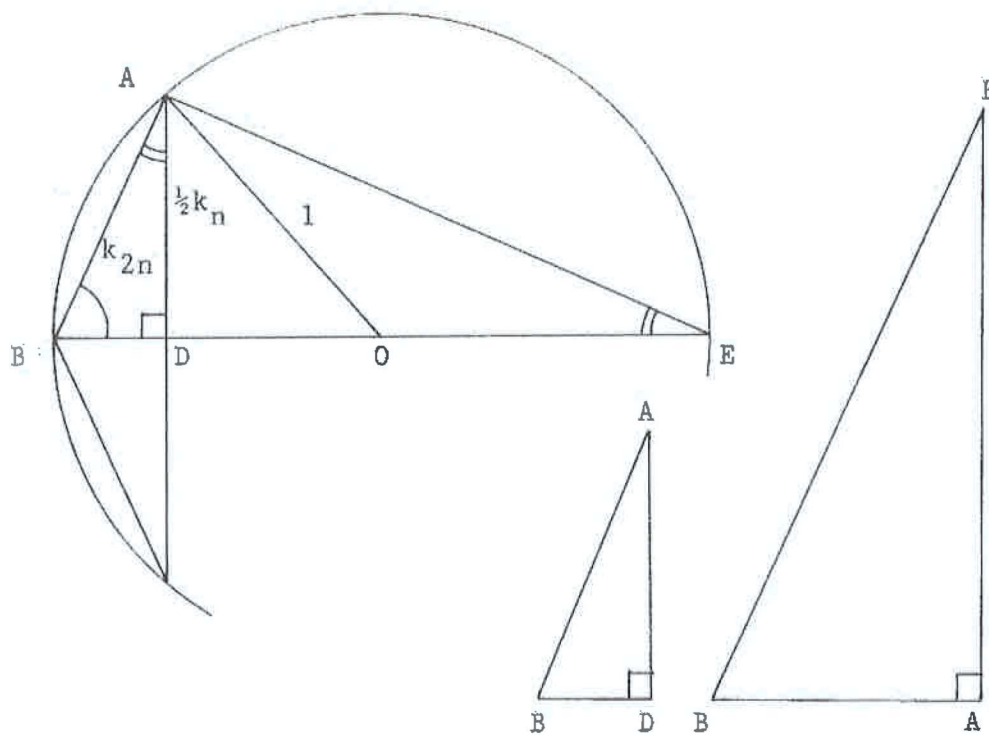
Bilag 1:



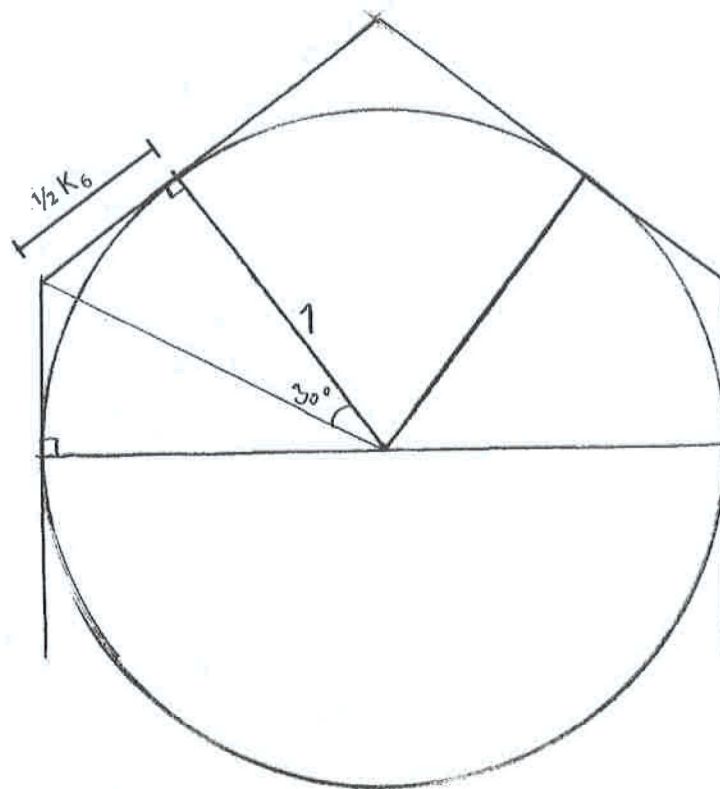
Bilag 2:



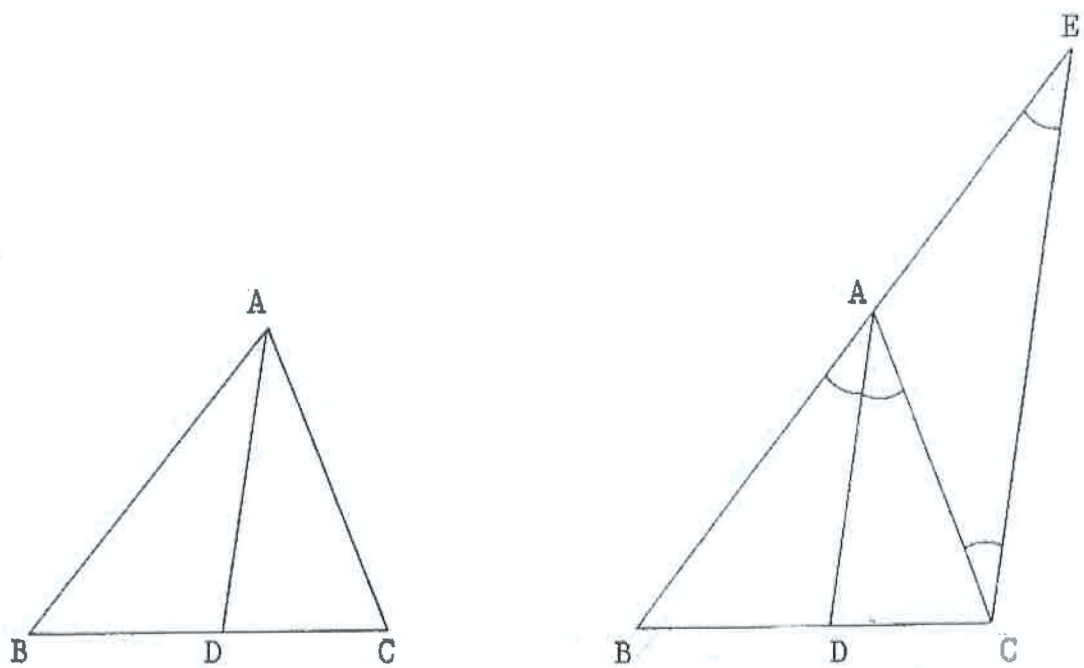
Bilag 3:



Bilag 4:



Bilag 5:



Bilag 6:

